Programme :

- Chapitre Préliminaire : suites de fonctions - Séries de fonctions.
- Séries de Fourier
- Transformeés de Laplace
- Transformeés de Fourier.
- Analyse Complexe
- Séries Complexes et théorie de résidus.

Scanned with CamScanner

Chapitre I : Suite de fonctions
. Série des fonctions

I. Suite de fonctions :

1.1. Convergence simple :

Déf : Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

- La suite de fonction $(f_n)_n$ converge simplement vers une fct f sur D si et seulement si : pour chaque $x \in D$ la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ càd :

$$(\forall x \in D) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathbb{N}) : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- La convergence simple est une convergence ponctuelle.

- Exemple 1.2 :

on considère la suite de fcts sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f_n(x) = x^n$$

- Si $|x| > 1$, la suite $(f_n(x))_n$ diverge.
- Si $|x| = -1$, la suite $(f_n(-1))_n$ diverge.
- Si $x \in]-1, 1]$, la suite $(f_n(x))_n$ converge simplement vers la fct f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 ; & \text{si } |x| < 1 \\ 1 ; & \text{Si } x = 1. \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

• Remarque :

Les fcts f_n sont continues sur $]-1,1]$, alors que la fonction f n'est pas continue en 1. Donc la continuité n'est pas transmise par la convergence simple.

• Exercice 1 :

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$

① Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$

② Déterminer $\lim_{n \to +\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

1°/ $x \in]0,1[\Rightarrow 0 < 1-x < 1$

$$f_n(x) = n.x.e^{\ln(1-x)}$$

$$= \frac{x}{\ln(1-x)} . n . \ln(1-x)\, e^{n \ln(1-x)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $f_n \xrightarrow{\text{Simplement}} f \equiv 0$ sur $[0,1]$.

2°/ $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$$= e^{n \cdot \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{e}$$

1.2. Convergence uniforme :

Déf : Soit $f_n : D \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une suite de fonction f sur D si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N}) : n > N \Rightarrow \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

càd :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall x \in D) : n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Scanned with CamScanner

- La Convergence uniforme est une convergence globale valable pour tous les éléments de D.
- L'entier N dépend seulement de ε. mais dans la Convergence simple il dépend de ε et x.

- théorème 1.5 :

Soit $f_n : D \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions

$f_n \to f$ uniformément sur $D \Leftrightarrow (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)$:

$f - f_n$ est bornée sur D et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

- Exemple :

on considère la suite de fct (f_n) telle que :

$f_n(x) = \frac{x}{n}$ $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

on a $(\forall x \in [0,1])$ $|f_n(x) - 0| = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$

$f_n - 0$ est bornée sur D.

donc $\sup\limits_{x \in D} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \|f_n\|_\infty \longrightarrow 0$

D'où $f \longrightarrow 0$ uniformément Continue sur $[0,1]$.

- Théorème 1.7 :

Soit $f_n : D \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions

$f_n \to f$ uniformément sur $D \Rightarrow f_n \to f$ simplement sur D.

. La réciproque est fausse.

- Exemple 1.8 :

1°/ Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{n}$

montrer que $f_n \to f \equiv 0$ uniformément sur $[0,1]$.

Scanned with CamScanner

Ce théorème permet de passer de la convergence simple vers la convergence uniforme

Théorème 1.9 (Th. de Dini)
Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segement $I=[a,b]$

si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est en fait uniforme.

• Théorème 1.10 (Linéarité de la convergence uniforme)
Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions définies sur D à valeurs dans ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Si $f_n \to f$ uniformément sur D et $g_n \to g$ uniformément sur D, alors la suite de fonctions $f_n + \lambda g_n$ converge uniformément vers $f+\lambda g$ sur D.

. Le théorème suivant nous permet de montrer la non convergence uniforme.

Scanned with CamScanner

• Théorème 1.11 :

Soit $f_n : D \to \mathbb{K}$ suite de fonctions et $f : D \to \mathbb{K}$ une fct.

- s'il existe (x_n) une suite d'éléments de D telle $f_n(x_n)$ ne tende pas vers 0, la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fct nulle sur D.

- s'il existe (x_n) une suite d'éléments de D telle $(f - f_n)(x_n)$ ne tende pas vers 0, la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fct f sur D.

• Exemple :

Pour $x \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$

montrer que $f_n \not\longrightarrow f \equiv 0 \to \frac{1}{e} \neq 0$.

Donc $f_n \to f \equiv 0$ uniformément sur $[0,1]$.

• Théorème 1.12 (th d'approximation de Weirstrass)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $[a,b]$ alors il existe une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$, c'est-à-dire il existe (P_n) suite de polynôme telle que $P_n \longrightarrow f$ uniformément sur $[a,b]$

Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segement d'une suite de polynômes.

Scanned with CamScanner

1.3. Propriétés qui passent par Convergence simple.

Ce sont les proprietés liées au symbole "$\leq$". à savoir le sens de variation, la convexité.

- proposition 1.14 :

Soit $f_n : D \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions.

On suppose que $f_n \to f$ simplement sur D.

1°/ Si $(\forall n \in \mathbb{N})$; f_n est Croissante (resp. décroissante) sur D, alors f est croissante (resp. décroissante) sur D.

2°/ Si $(\forall n \in \mathbb{N})$ f_n est Convexe, alors f est Convexe.

3°/ Si $(\forall n \in \mathbb{N})$ f_n est Concave, alors f est Concave.

- Remarque :

1.4. Les grands théorèmes de la convergence uniforme

. Théorème 1.15 : (interversion des limites)

Soit $f_n : D \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions

Supposons que $f_n \to f$ uniformément sur D.

et que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\lim_{x \to a} f_n(x) = l_n$

Alors : la suite $(l_n)_n$ Converge dans $\mathbb{K}$.

$\lim_{x \to a} f(x) = l$.

$\lim_{n \to +\infty} l_n = l$.

ou plus explicitement : $\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)$

Scanned with CamScanner

- Remarque : Le théorème précédant

- Théorème 1.16 : (Continuité de la limite)

Soit $f_n : D \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions continues sur un convexe D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Supposons que $f_n \to f$ uniformément sur D.

Alors la fonction f est continue sur D.

et on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

par contra-position : si la famille f n'est pas continue sur D, alors la convergence n'est pas uniforme.

- Théorème 1.17 : (Dérivation de limite)

Soit $f_n : D \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Si :
- $f_n \to f$ simplement sur D.
- $(\forall n \in \mathbb{N})$ f_n est dérivable.
- la suite (f_n') converge uniformément sur D vers une fonction g, alors la fonction f est dérivable sur D et $f' = g$.

et on a :

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty}(f_n')$$

- Théorème (intégration) :

Soit f_n une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$.

Si (f_n) converge uniformément vers f sur D.

Alors f est continue

Scanned with CamScanner

2.1. Types de Convergence :

Déf: Soit f_n une suite de fonctions réelles ou complexes définies sur une partie D de $\mathbb{K}$.
On appelle série de fonctions de terme général f_n, la suite de fonction S_n définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

on note $\sum f_n$ la série de terme général f_n.
la $n^{ème}$ somme de cette série est $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

- Soit f une fct définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(1) la série $\sum f_n$ converge simplement vers f dans D si et seulement si la suite de fcts (S_n) converge simplement vers f dans D.
càd pour chaque $x \in D$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge vers le nombre $f(x)$.

On dit dans ce cas que f est la somme sur D de la série $\sum f_n$, et on écrit :

$$(\forall x \in D) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

(2) La série $\sum f_n$ converge uniformément vers f dans D si et seulement si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément vers f dans D.

(3) La série $\sum f_n$ converge absolument dans D si pour chaque $x \in D$ la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.

Scanned with CamScanner

• pour les séries de fonctions, on dispose d'un autre type de Convergence.

(3) La série $\sum f_n$ converge normalement sur D s'il existe une série numérique à termes positifs $\sum a_n$ tel que :

1) $\forall x \in D \quad |f_n(x)| \leq a_n$

2) La série $\sum a_n$ Converge

La convergence normale de série $\sum f_n$ est équivalente càd que :

Toutes les fonctions f_n sont bornées sur D et que la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ Converge.

$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in D} |f_n(x)|$

• Exemple :

1°/ $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$

posons $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$

on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$

la série $\sum \frac{1}{n^2}$ Converge.

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ Converge normalement Sur $\mathbb{R}$.

2°/ $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

• Pour $x \geq 0$: $\frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$

la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ Converge.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ Converge normalement sur $[0, +\infty[$.

Scanned with CamScanner

2.2. Critères de convergence simple :

Pour x fixé, $f_n(x)$ est le terme général d'une série numérique.

On peut donc utiliser le critère de Cauchy et celui de d'Alembert.

- **Critère d'Alembert :**

Soit $\sum U_n$ une série numérique à termes positifs, et $\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$

- $\ell > 1 \Rightarrow \sum U_n$ Converge.
- $\ell < 1 \Rightarrow \sum U_n$ diverge.
- $\ell = 1 \Rightarrow \sum U_n$ on ne peut pas conclure (Cas douteux).

- **Critère de Cauchy :**

Soit $\sum U_n$ une série numérique à termes positifs et $\lim (U_n)^{1/n} = \ell$

- $\ell > 1 \Rightarrow \sum U_n$ Converge
- $\ell < 1 \Rightarrow \sum U_n$ diverge.
- $\ell = 1 \Rightarrow \sum U_n$ on ne peut pas conclure (Cas douteux).

2.3. Critères de Convergence uniforme :

- Critère de Cauchy uniforme :

La série $\sum f_n$ est uniformément convergente $\Leftrightarrow$ la série $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme suivant :

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall x \in D)\ (\forall p, q > N)$; $|f_{p+1}(x) + \dots + f_{p+q}(x)| < \varepsilon$

⚠ Ce critère est peut pratique

Scanned with CamScanner

2.4. Implication entre les types de Convergence :

C.N $\longrightarrow$ C.A $\Longrightarrow$ C.S

C.N $\Longrightarrow$ C.U $\Longrightarrow$ C.S

. il n'y a pas d'implication entre C.A, C.U, et C.N

Exemple : Une série peut-être uniformément Convergente sans y être normalement Convergente.

On Considère la série de fct $\sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$; $x \in [0,1]$

2.5. Critère d'Abel pour les séries de fonctions :

. Théorème 2.4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = a_n . b_n$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites de fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$.

. On suppose que :

1) Pour tout $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$ les sommes partielles $B_n(x) = b_0(x) + \dots + b_n(x)$ sont majorées uniformément.

càd $(\exists M > 0)\ (\forall x \in D)\ (\forall n \in \mathbb{N})\quad |B_n(x)| \leq M$.

2) Pour tout $x \in D$, la suite numérique $(a_n(x))$ est positive, décroissante et tend uniformément vers 0.

Alors, la série $\sum f_n$ est uniformément Converge sur D.

. Exemple 2.5 :

On Considère la série de fonctions $\sum \frac{e^{int}}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

1) Si $\alpha \leq 0$ et $t \neq K\pi$ $(K \in \mathbb{Z})$

2) Si $\alpha \in]0,1]$ et $t \neq 2K\pi$ $(K \in \mathbb{Z})$

3) Si $\alpha >$ et $t \neq 1K\pi$ $(K \in \mathbb{Z})$.

Scanned with CamScanner

2.6. Propriétés de la somme d'une série convergente

• Théorème 2.6 (continuité) :

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur partie convexe D de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$.

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément, sur D, vers la somme S alors sa somme est continue sur D.

• Théorème 2.7 (intégration)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$

Alors sa somme S est continue sur $[a,b]$ et on peut d'intégrer terme à terme

de plus la série $\sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)\,dx$ converge uniform. sur $[a,b]$ vers $\int_a^b S(x)\,dx$

et on a : $$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

• Théorème 2.8 :

Soit (f_n) une suite de fcts continues sur $[a,b[$ telle que $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f_n(x) = a_n$ $(b<+\infty$, pour tout $n)$.

Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a,b[$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge et on a :

$$\lim_{x\to b} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to b} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

• Théorème : Soit (f_n) une suite de fonction dérivable sur un intervalle I telle que : $\left(S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)$

Scanned with CamScanner

(1) $(\exists x_0 \in I)$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge

(2) La série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur I,

alors la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I,

et sa somme S est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I) \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

$$\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \right)$$

Scanned with CamScanner

Les Séries de Fourier

1/ Généralités :

1.1. Fonction périodique :

Déf: Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

f est périodique $\Leftrightarrow (\exists T > 0)\ (\forall x \in D)\ x + T \in D$ et :

$$f(x+T) = f(x).$$

- Le plus petit T tq $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appellé la période de f.
- la variable $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appellée pulsation associée à T.

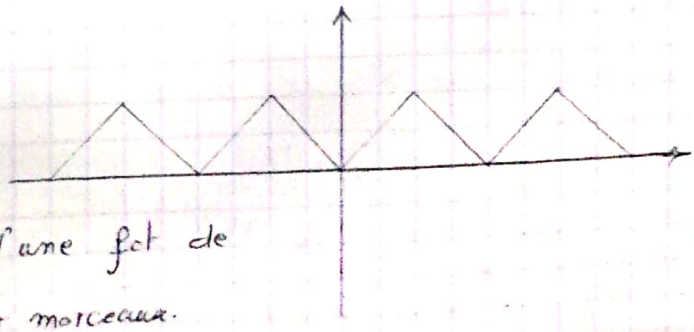
- proposition : Si f est T-périodique alors :

$f(x + nT) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

- Exemple :
  - la fct $x \mapsto \cos(ax+b)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{|a|}$
  - la fct $\cos(2\pi x)$ est périodique de période 1.
  - la fct $x \mapsto e^{ix}$ est périodique de période 2π.

Déf : (Continuité par morceaux)

Une fct $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite Continue par morceaux sur $[a,b]$ (resp de classe C^p par morceaux) s'il existe une subdivision de $[a,b]$ $(a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b)$ et des fcts $f_1, \dots, f_n$ continues (resp de classe C^p) sur $]a_i, a_{i+1}[$ $(i = 0, \dots, n-1)$



- il s'agit d'une fct de classe C^0 par morceaux.

Scanned with CamScanner

• Remarque : une fct continue par morceaux n'est pas nécessairement continue aux points de la subdivision, mais elle admet en ces points une limite à gauche et une à droite notée $f(x_0^+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$

• proposition (fct périodique et intégration)
Soit f une fct T-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors :

(1) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$

(2) $(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$.

(1). on pose $t = x + T \Rightarrow dt = dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(t-T)\,dT = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$$

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

$$= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad \text{(1)}$$

$$= \int_0^T f(x)\,dx.$$

• proposition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fct T-périodique

(1) f est paire $\Leftrightarrow f_{/[-T/2, T/2]}$ est paire.

(2) f est impaire $\Leftrightarrow f_{/[-T/2, T/2]}$ est impaire.

en effet :

(1) $\Leftarrow$: Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tque :

$$-x + kT \in [-T/2, T/2]$$

en effet $-x + kT \in [-T/2, T/2] \Leftrightarrow -T/2 \leq -x + kT \leq T/2$

$$\Leftrightarrow x - T/2 \leq kT \leq x + T/2$$

Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow \quad \frac{x-T/2}{K} \leq K \leq \frac{x+T/2}{T}$

il suffit de prendre $K = E\left(\frac{x+T/2}{T}\right)$

$f(-x) = f(-x+KT)$ (car f est T-périodique)

$= f(-(x-KT)) \leftarrow f/_{[-T/2, T/2]}$ est paire.

$= f(x-KT)$.

$= f(x)$.

d'où f est paire.

• Exemple :

on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π.

telle que $f(x) = x(2\pi - x)$ sur $[0, 2\pi]$.

1) Mq : f est paire. Faux (voir la correction dans le TD)

il suffit de montrer que $f/_{[-\pi, \pi]}$ est paire.

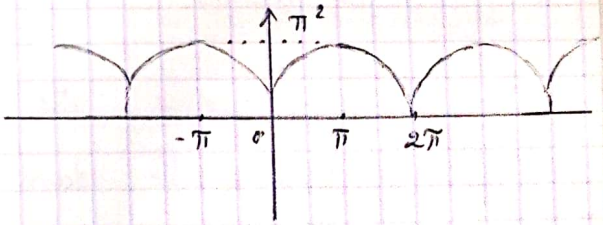
Soit $x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow -x \in [-\pi, \pi]$.

$f(-x) = f(2\pi - x)$ (car f est 2π-périodique).

$= (2\pi - x)(2\pi - (2\pi - x))$

$= x(2\pi - x)$.

$= f(x)$.



donc $f/_{[-\pi, \pi]}$ est paire $\Rightarrow f$ est paire.

• Remarque : Soit f une fct T-périodique.

alors la fonction $g : x \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi} x\right)$ est une fct 2π-périodique.

en effet : $g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi} x + T\right)$

$= f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) = g(x)$.

Conclusion : On peut tjrs se ramener aux fcts 2π-périd.

Scanned with CamScanner

• Remarque : Si on note $D_{2\pi} = \{ f : \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \ / \text{ Continue par morceaux et } 2\pi\text{-périodique} \}$

. $D_{2\pi}$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

. On peut définir un produit scalaire hermitien.

Pour $f, g \in D_{2\pi}$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot g(t)\, dt$$

$\|f\| = \sqrt{\langle f, g \rangle}$ est une norme sur $D_{2\pi}$.

2/ Séries trigonométriques :

2.1, Séries Trigonométriques :

Déf: On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fcts de la forme :

$$U_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad ; \quad n \geq 1$$
$$U_0(x) = \frac{a_0}{2}$$

où a_n et b_n sont des suites complexes ou réelles et $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 1 : Le problème est de déterminer l'ensemble dans laquelle la série soit convergente. U_n est une fonction continue p'iodique de période 2π.

Remarque 2 : Soit $T > 0$;

Posons $V_n = a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$

la fonction V_n est continue de période T.

le nombre $w = \frac{2\pi}{T}$ est appelé la pulsation.

le nombre $f = 1/T$ est appelé la fréquence.

Scanned with CamScanner

. Remarque : Autre expression de U_n

sachant que $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

on a : $U_n(x) = a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$

avec $n \geq 1$

$$U_n(x) = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}$$

Pour $n \geq 1$. posons :

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{et} \quad C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{C_n} \quad \text{et} \quad C_0 = \frac{a_0}{2}$$

. Alors on peut ecrire , sous réserve que la série en question converge .

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{inx}$$

avec la convention suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n + \alpha_{-n}).$$

On en déduit que $a_n = C_n + C_{-n}$ et $b_n = i(C_n - C_{-n})$

pour $n \geq 1$

Déf: on considère la série trigonométrique suivante :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

. $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est appellé l'harmonique de la série.

. Le premier harmonique de la série est appelé le fondamental.

. Quand a_n et b_n ne sont pas tous les deux nuls, on peut transformer $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

Scanned with CamScanner

Déf: On considère la série trigonométrique suivante :

(X) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. (X) Répété

- $a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$ est appelé l'harmonique de la série.

---

sous forme $A_n \cdot \cos(nx + \varphi_n)$

la série trigonométrique devient alors :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \sin(nx) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(nx + \varphi_n).$$

. Conclusion : Une série trigonométrique peut s'écrire de 3 façons :

→ Réelle : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

→ harmonique : $\frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos(nx + \varphi_n)$

→ Complexe : $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$

2.2. Convergence :

On donne deux cas où la série $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge

(où $U_n(x) = a_n \cdot \cos(nx) + b_n \sin(nx)$)

. proposition : Si les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes, la série trigonométrique, $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$, est uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.

et sa somme $U(x)$ est une fonction continue périodique de période 2π.

Exp :

(1) On considère la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2+1}$

Scanned with CamScanner

On pose $H_n(x) = \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2+1}$.

H_n est une fonction périodique de périodique $T=1$.

la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$a_n = \frac{1}{n^2+1}$ et $b_n = 0$.

on sait que la série $\sum_{n\geq 0} |a_n| = \sum_{n\geq 0} \left|\frac{1}{n^2+1}\right|$ est Convergente.

Donc d'après la proposition 2.3, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2+1}$ Converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

D'ou la fct $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2+1}$ périodique Continue périodique de période 1.

. proposition :

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites positives, décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ est Convergente uniformément sur tout Compact $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$.

Sa somme $u(x)$ est Continue sur $]0, 2\pi[$. donc sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

La preuve est basée sur le théorème d'Abel.

. Exemple :

1/ On Considère la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{n}$.

2.3. Calcul des Coefficients en fct de somme

on suppose que la série converge uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Scanned with CamScanner

et on pose $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{inx} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ipx}\, dx = \int_0^{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{i(n-p)x}\, dx$$

la convergence est uniforme, donc on peut intervertir les symboles

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ipx}\, dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{i(n-p)x}\, dx.$$

on sait que : Si $n \neq 0$, $\int_0^{2\pi} C_n \cdot e^{inx}\, dx = \left[\frac{1}{in} e^{inx}\right]_0^{2\pi} = 0$

et si $n = 0$; alors $\int_0^{2\pi} C_n \cdot e^{inx}\, dx = 2\pi$.

Donc :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ipx}\, dx = 2\pi C_p$$

d'où

$$C_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ipx}\, dx.$$

- Conclusion :

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$a_p = C_p + C_{-p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left(e^{ipx} + e^{-ipx}\right) dx$$

$$a_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left(\cos(px)\right) dx$$

$$b_p = i\left(C_p - C_{-p}\right) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left(e^{ipx} - e^{-ipx}\right) dx$$

$$b_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left(\sin(px)\right) dx$$

- Remarque :

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x).$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

Scanned with CamScanner

Formulaire :

on retiendra les formules suivantes :

$$a_p = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \left(\cos(px)\right) dx \;,\; \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$b_p = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \left(\sin(px)\right) dx \;,\; \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$c_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\, e^{-ipx}\, dx \;,\; \alpha \in \mathbb{R}.$$

. En particulier pour $\alpha = 0$, on retrouve les formules de la Conclusion 1. Tandis que, si $\alpha = -\pi$ alors :

$$a_p = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\cos(px)\right) dx \;,\; \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$b_p = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\sin(px)\right) dx \;,\; \alpha \in \mathbb{R}.$$

• <u>Cas général</u> : la période $T \neq 2\pi$

la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$c_p = \frac{1}{T} \cdot \int f(x)\, e^{-i\omega p x}$$

$$a_p = \frac{2}{T} \cdot \int f(x) \cos(\omega p x)$$

$$b_p = \frac{2}{T} \cdot \int f(x) \sin(\omega p x)$$

• <u>proposition</u> : (La parité)

(1) Si f est paire alors $b_p = 0$

et $a_p = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \left(\cos(px)\right) dx$

(2) Si f est impaire alors $a_p = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \left(\sin(px)\right) dx$

3/ <u>Developpement en série de Fourier</u>

Dans cette section, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ périodique de période 2π, localement

Scanned with CamScanner

localement intégrable.

Déf: Les coefficients de Fourier d'une fonction f sont les nombres réels ou complexes :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \left(\cos(nx)\right) dx \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \left(\sin(nx)\right) dx \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

il se peut que ses intégrables définissent les

Déf: On appelle série de Fourier d'une fonction f, la série trigonométrique :

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot e^{-inx}$$

où a_n, b_n et c_n sont les coefficients de Fourier de f.

• Remarque :

Si g est une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ le développement en série de Fourier de g dans $[a,b]$ est celui de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ périodique de période $T = b-a$ et $f = g$ sur $[a,b]$.

(f est un prolongement de g à $\mathbb{R}$).

On appelle série de Fourier d'une fonction, la série trigonométrique.

Scanned with CamScanner

. problème : La série associée à f est-t-elle Convergente En Cas de Convergence, peut-on dire que la série Converge vers f ?

Exemple : Soit f une fonction 2π-périodique, impaire définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

. Exemple :

Soit f une fonction 2π-périodique, définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = |x|$

3.2. Propriétés de Coefficients de Fourier :

. Lemme de Rieman-Lebesgue

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$

Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, on pose $I(t) = \int_a^b f(x)\, e^{itx}\, dx$

Alors $\lim_{t \to +\infty} I(t) = 0$.

. proposition (Conséquences)

les coefficients de Fourier a_n, b_n et c_n tendent vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.

D'aprés le Lemme on a :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = 0 \quad \text{(dés que } f \text{ est integrable)}$$

pour $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \mathrm{Re}(f(x))(\cos(nx))\, dx + \frac{i}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \mathrm{Im}(f(x)) \cos(nx)\, dx$$

Scanned with CamScanner

• proposition : Si la fct f est de classe C^k, périodique de période 2π, alors on a :

$$C_n(f) = \frac{1}{(in)^k} \cdot C_n\left(f^{(k)}\right)$$

• Conséquences :

(1) Si f est de classe C^k, alors il existe une Cst M_f telle que $|C_n(f)| \leq \frac{M_f}{n^k}$

en effet

f est de classe $C^k \Rightarrow f^{(k)}$ est Continue.

On pose $M = \sup |f^{(k)}(x)|$, alors :

$$\left| \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f^{(k)}(x)\, e^{-inx}\, dx \right| \leq M \left| \int_\alpha^{\alpha+2\pi} e^{-inx}\, dx \right|$$

$$\left| \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f^{(k)}(x)\, e^{-inx}\, dx \right| \leq 2\pi M.$$

(Donc $|(in)^k||C_n(f)| \leq 2\pi M = M_f$) Faux (X)

d'où :

$$|C_n(f)| \leq \frac{M_f}{n^k}$$

càd : plus une fonction est régulière, plus ses coeff de Fourier décroissent rapidement vers 0.

(régulière = infiniment dérivable).

• Théorème de Dirichet :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fct localement intégrable, 2π périodique.

Si f satisfait les deux conditions suivantes :

(1) pour tout $x \in \mathbb{R}$, f admet une limite à gauche et une à droite au point x, notée respectivement

Scanned with CamScanner

$f(x^-)$ et $f(x^+)$.

(2) la fct $u \mapsto \frac{1}{u}\left(f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-)\right)$ est bornée au voisignage de $u = 0$.

Alors au pt x, la série de Fourier de f converge vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

. Lemme (Noyeau de Dirichlet)

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos(pu)$$

avec $(u \in \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z})$

. Théorème (Formule de Dirichlet)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable 2π-périodique.

La somme partielle de la série de Fourier satisfait

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(f(x+u) + f(x-u)\right) \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(f(x+u) + f(x-u)\right) D_n(u)\, du.$$

Avant de donner des cas classiques de Convergence, nous déffimissons d'abord la dérivée généralisée.

. Définition :

Soit f une fonction n'est pas nécessairement cln en x,

f admet une dérivée généralisée à droite (res à gauche) de x si :

Scanned with CamScanner

$\lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \left(f(x+u) - f(x^+) \right)$ existe.

(repp. $\lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \left(f(x-u) - f(x^-) \right)$ existe).

- Corollaire :

Dans le th. précédant, on remplace la conditon (2) (2 bis) la fonction f admet une dérivée généralisée à droite et une à gauche de x.

Alors la conclusion du théoreme subsiste.

$$(2 \text{ bis}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{u \to 0^+} \dfrac{f(x+u) - f(x^-)}{u} = l_1 \text{ existe} \\ \lim_{u \to 0^+} \dfrac{f(x-u) - f(x^-)}{u} = l_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \left(f(x^-+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-) \right) = l_1 + l_2$$

$\Rightarrow$ la fct $\frac{1}{u} \left(f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-) \right)$ est bornée au voisignage de 0 c'est (2)

- Corollaire :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fct localement intégrable, 2π périodique, Si f est continue au point x et admet en ce point, une dérivée à droite et une à gauche Alors, la série de Fourier de f converge vers $\frac{1}{2} \left(f(x^+) + f(x^-) \right) = f(x)$ et on a :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx).$$

- Corollaire :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fct localement intégrable 2π périodique, si f est dérivable

Alors sa série de Fourier converge vers $f(x)$.

Scanned with CamScanner

• Corollaire : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique.
Si f est dérivable par morceaux.
Alors, sa série de Fourier converge vers $f(x)$ en chaque point x de continuité, et vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ au point de discontinuité.

• Corollaire : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique
Si f est de classe C^1 par morceaux,
alors pour tout x, la série de Fourier de f est convergente en x et a pour somme
$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \hat{f}(x)$ (la fct régularisante de f)

En particulier, au point de continuité, la somme de la série de Fourier est $f(x)$.
De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où f est continue.

• Exemple (Exercice 3 TD 1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & \text{si } x \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

• f est localement intégrable, 2π périodique (continue par morceaux).
• f est paire donc $\forall n \; a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

Donc $S_F(f) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$.

f est dérivable sur $]0, \pi[\Rightarrow S_F(f)$ converge vers $-f(x)$ pour tout $x \in]0, \pi[\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

• f est dérivable sur $]-\pi, 0[$
$\Rightarrow \sum \frac{\sin(nx)}{n} = f(x)$ pour tout $x \in]-\pi, 0[$
$= f(x + 2\pi) = f\left(\frac{\pi - x - 2\pi}{2}\right) = \frac{x - \pi}{2}$.

Scanned with CamScanner

En 0 : f n'est pas continue en 0 mais $f(x^+) = \frac{\pi}{2}$

et $f(x^-) = -\frac{\pi}{2}$

+ f admet une dérivée généralisé à gauche et à droite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(0+u) - f(0^+)}{u} = \frac{\frac{\pi - u}{2} - \frac{\pi}{2}}{u} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(0-u) - f(0^-)}{u} = \frac{\pi - u/2 - (-\pi/2)}{u} = \frac{1}{2}$$

$$f(-u) = f(2\pi - u) = \frac{\pi - 2\pi + u}{2} = \frac{u - \pi}{2}$$

Conclusion : La série de Fourier $S_F(f)$ converge en 0 vers $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0 = f(0)$.

- proposition : si f vérifie les hypothèses de Dirichlet et elle est continue sur $\mathbb{R}$

Alors f est développable en série de Fourier, et on a $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

- Théorème de Jordan :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fct 2π-périodique, intégrable

Si f est monotone par morceaux.

Alors la série de Fourier de f CV vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$

- Inégalité de Bessel :

mathématicien allemand Friendrich Wilhelm Bessel (1784, 1846)

- Théorème : (Inégalité de Bessel)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une 2π-périodique, intégrable

si C_n et D_n et C_n sont les Coeff. de Fourier de f

Scanned with CamScanner

alors :

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2$$

ou encore :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2$$

- Exemple :

on considère la série trigonométrique suivante

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

1/ Montrer que cette série est Convergente.

2/ Montrer que cette série n'est pas une série de Fourier d'aucune fonction intégrale.

1/ $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est une série trigonométrique suivante

$a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est Convergente

(car a_n et b_n Convergent)

2/ Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable dont la série de Fourier associée est $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

D'après l'intégalité de Bassel :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \quad \text{(absurde)}$$

Car la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Scanned with CamScanner

Résumé

Fonction 2π-périodique

- La période $= 2\pi$
- La Pulsation $= \frac{2\pi}{2\pi} = 1$
- La série de Fourier associée :

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\, dx$$

- Les coefficients de Fourier :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\, dx .$$

Fonction 2ℓ-périodique (Cas Généralisé)

- La périodique $T = 2\ell$
- La pulsation $w = \frac{2\pi}{T}$
- La série de Fourier associée :

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)$$

- Les coefficients de Fourier :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos(nwx)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin(nwx)\, dx$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\, dx .$$

- Imégalité de Pascal :

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T |f(t)|^2\, dt$$

Cas Particulier :

- Si f est paire $\Rightarrow$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$; $b_n = 0$
- Si f est imp $\Rightarrow$ $a_n = 0$; $b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$

Scanned with CamScanner

Chapitre 2 : Transformées de Laplace

. Rappel Sur les intégrales généralisées :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Si $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_a^R f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, ce que l'on note

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(t)\,dt$$

on dit également que f est intégrable.

- Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente.

. Théorème 0.2 :

. Si l'intégrale est absolument convergente, alors elle est convergente. càd Abs. Convergente $\longrightarrow$ Convergente.

. Théorème 0.3 :

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ (fonction à valeurs positives) alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)$ converge $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ tque $\int_a^R f(t)\,dt < M$ pour tout $(R > 0)$

Dans ce cas $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant M$.

Théorème 0.4 :

Soit $f, g : [a; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ deux fonctions (à valeurs positives) et telles que : $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \geqslant a$

- $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ Converge $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ Converge.
- $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

Scanned with CamScanner

- $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty$.

1/ Définition de la transformée de Laplace et Existence

Définition :

- La transformée de Laplace est une transformation intégrable qui associe une fonction f ($f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) à une fonction d'une variable complexe $\mathcal{L}(f)$

$$\mathcal{L} : f \to \mathcal{L}(f) \text{ ou } \mathcal{L}(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R}.$$

- Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. la transformée de Laplace (si elle existe) est la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie par :

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\,dt \quad \text{où} \quad (p \in \mathbb{C})$$

- La transformation de Laplace est l'opérateur $\mathcal{L}$ qui permet de transformer f en $\mathcal{L}(f)$

- **Remarque 1.2 :**

La transformée de Laplace est essentiellement utilisée dans un cadre physique, elle concerne les phénomènes transitoires, avant une certaine date il n'y a rien, puis le phénomène physique se produit. En prenant cet instant comme origine, on peut supposer que la fct f définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et vaut 0 sur $]-\infty; 0]$. C'est pourquoi on considère uniquement des signaux causaux, càd $= 0$ pour

- **Définition 1.3 :**

La fct définie par $\begin{cases} f(t) = 0 & , t < 0 \\ C^\circ \text{ par morceaux} & ; t \in [0, +\infty[\end{cases}$

est appellée fonction causale.

Scanned with CamScanner

Exemple : (Fonction Heaviside)

. La fonction de Heaviside (également fonction échelon unité, fonction marche d'escalier) définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 0 ; t<0 \\ 1 ; t \geq 0 \end{cases}$$

. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la fonction $H(t)$ est causale.

. Remarque 1.5 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction, On appelle transformée de Laplace de f (si elle existe) la fct définie par :

$$L(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot H(t) e^{-pt} dt.$$

Où H est la fonction de Heasiside.

. Problème (Questions)

. En quels points la fonction $L(f(t))$ est-elle définie ?

. Dans quelles circonstances l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ existe ?

. Quelles sont les propriétés algébriques, différentielles et intégrales de la transformée de Laplace ?

. Définition 1.6 :

1/ Une fct $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite Continue par morceau si f est Continue sur chaque intervalle $[a,b] \subset [0, +\infty[$ sauf en un nombre fini de points et tels que les limites à gauche et à droite en ces points existent et sont finis.

Scanned with CamScanner

2/ Une fonction f est dite à croissance au plus exponentielle quand il existe des nombres réels $M \geq 0, A \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall t > A)\ |f(t)| \leq M e^{\alpha t}$

On dit aussi que f est d'ordre de $e^{\alpha t}$ au voisignage de $+\infty$ (Autrement dit au voisignage de $+\infty$, $|f|$ ne croît pas plus vite que l'exponentielle d'une fct linéaire.

· **Définition 1.7.** (Fonction Objet)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On dit que f est une fonction objet (ou de classe $\mathcal{L}$) si :

- f est causale
- f est à croissance au plus exponentielle.

On note $\mathcal{O}$: L'ensemble des fcts objet.

· **Exemple :**

→ $e^t H(t) \in \mathcal{O}$

→ $\sin(t)\ H(t) \in \mathcal{O}$

→ $\cos(t)\ H(t) \in \mathcal{O}$

→ Mais $t \mapsto e^{t^2} H(t)$ n'est pas une fonction objet Car Sinon, il existe M, A, α tel que $e^{t^2 - \alpha t} < M$ pour tout $t > A$, Ce qui est absurde.

· **Théorème 1.8**

Si f est une fonction objet (i.e $f \in \mathcal{O}$) telle que $(\forall t > A)\ |f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, alors sa transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(p)$ existe pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p) > \alpha$

Scanned with CamScanner

Abscisse de Convergence :

Soit $f \in \mathcal{O}$ une fonction objet, donc il existe A, M, α tel que :

$(\forall t > A) \quad |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$

Donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\beta t} dt$ Converge vers une limite finie.

On note $a(f) = \inf \{ \beta \in \mathbb{R} / \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\beta t} dt \text{ CV} \}$

où la borne inférieure est considéreé dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty ; -\infty\}$

$a(f)$ est appelé abscisse de Convergence de f.

$a(f) = -\infty$ si $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\beta t} dt$ Converge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

$a(f) = +\infty$ si l'ensemble $\{ \beta \in \mathbb{R} / \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\beta t} dt \text{ CV} \}$ est vide.

Exemple :

$$f(t) = H(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t < 0 \\ 1 & \text{Si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-\beta t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} dt$$

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-\alpha t} dt$$

- Si $\alpha \neq 0$:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{-\alpha} \left[e^{-\alpha t} \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-\alpha} \left(-e^{-\alpha x} - 1 \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{Si } \alpha > 0 \\ \infty & \text{Si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

→ Si $\alpha = 0$:

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{|f(t)|}_{\leq 1} e^{-\alpha t}\, dt = \infty$$

• Donc l'abscisse de Convergence est $a(H) = \inf \{ \alpha / \int |f(t)| e^{-\beta t} \text{ existe} \}$

• Remarque 1.9 :

• Si $f \in \mathcal{O}$ alors $a(f) \neq \infty$

• Si $f \in \mathcal{O}$ alors sa transformée de Laplace est définie sur le demi-plan $\{ z \in \mathbb{C} / Re(z) > a(f) \}$

• Exemples :

1/ $f = H$, la fonction de Heasivicle, alors $a(f) = 0$.

2/ $f = C.H$, alors $a(f) = 0$. (où C est une Constante).

3/ $f = Sin.H$, alors $a(f) = 0$.

• Exemple :

$$f(t) = Sin(t) \cdot H(t)$$

ona :

→ f est causale

→ $\forall t \in [0, +\infty[\quad f(t) = |Sin(t) \cdot H(t)| \leq 1 \leq e^t$

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}$

$$\int_0^x |f(t)|\, e^{-\alpha t}\, dt = \int_0^x |Sin(t)|\, e^{-\alpha t}\, dt$$

$$\leq \int_0^x e^{-\alpha t}\, dt$$

$$\leq \frac{1}{-\alpha} \left[e^{-\alpha t} - 1 \right] \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha} \quad \text{disque } \alpha > 0$$

• Exemples :

3/ Considérons la fonction $f(t) = Sin(t)$ pour $t \geq 0$

→ f est causale

→ f est Continue sur $[0, +\infty[$

→ f est à croissance au plus exponentielle.

Scanned with CamScanner

• Sa transformée de Laplace est :

$\mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}(\sin(t))(p) = \frac{1}{1+p^2}$ dès que $\mathrm{Re}(p) > 0$

⚠ Remarque : Dans ce chapitre, on va considérer que les fonctions causales, donc dorénavant, on note $f(t)$ pour $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $t \geq 0$ au lieu de $H(t) f(t)$.

• proposition 2.1 :

Soient $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ deux fonctions telles que $\mathcal{L}(f(t))(p)$ et $\mathcal{L}(g(t))(p)$ existent pour $p \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))(p)$ existe pour $p \in \mathbb{C}$ et on a $\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))(p)$

$= \alpha \mathcal{L}(f(t))(p) + \beta \mathcal{L}(g(t))(p)$.

2.1. Linéarité :

Soient f, g deux fcts objet et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ deux scalaires

(1) Alors $\alpha . f$ est une fct objet d'abscisse de Convergence :

$a(\alpha . f) = a(f)$, si $\alpha \neq 0$

$a(\alpha . f) = -\infty$, si $\alpha = 0$.

De plus $\mathcal{L}(\alpha . f(t))(p) = \alpha \mathcal{L}(f(t))(p)$ pourtout $p \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Re}(p) > a(f)$.

(2) $f+g$ est aussi une fonction objet d'abscisse de Convergence :

$a(f+g) = \max\{a(f), a(g)\}$, si $f+g \neq 0$

$a(f+g) = -\infty$, si $f+g = 0$.

De plus, $\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))(p) = \alpha . \mathcal{L}(f(t))(p) + \beta \mathcal{L}(g(t))(p)$,

pour tout $p \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Re}(p) > \max\{a(f), a(g)\}$.

Scanned with CamScanner

2.2. Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles :

- **Proposition 2.2.1 :**

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $\mathcal{L}(e^{\alpha t})(p) = \frac{1}{p-\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{C}$ tq $Re(p) > Re(\alpha)$.

- **Proposition 2.2.2 :**

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. alors on a :

- $\mathcal{L}(\cos(\omega t)(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ pour tout $p \in \mathbb{C}$ tq $Re(p) > 0$
- $\mathcal{L}(\sin(\omega t)(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ pour tout $p \in \mathbb{C}$ tq $Re(p) > 0$.

2.3. Changement d'echelle : (Homothétie)

- **Proposition 2.3 :**

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ une fct admettant une transformée de Laplace en p, Alors :

$\mathcal{L}(f(at)(p))$ existe pour tout $a > 0$

et on a :

$$\mathcal{L}(f(at)(p)) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{L}(f(t))\left(\frac{p}{a}\right).$$

2.4. Amortissement (retard) - translation :

- **proposition :**

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction tel que $\mathcal{L}(f(t)(p))$ existe pour $p \in \mathbb{C}$.

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t)(p))$ et $\mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t))(p)$ existent et :

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(p) = \mathcal{L}(f(t)(p-\alpha))$$

$$\mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t))(p) = \mathcal{L}(f(t)(p+\alpha))$$

- Exemples :

1/ $\mathcal{L}(e^{3t} \sin(2t))(p) = \quad = \frac{2}{(p-3)^2+2^2}$

Scanned with CamScanner

2.5. Transformée de Laplace des dérivées :

• **proposition 2.5**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}^+$ tq $f^{(k)}(t) \in \mathcal{E}_\alpha$ pour tout $k = 1, \dots, n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. alors pour tout $p \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Re}(p) > \alpha$ on a :

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(p) = p^n \mathcal{L}(f(t))(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

• **Cas particulier :**

$$\mathcal{L}\left(f'(t)\right)(p) = p\,\mathcal{L}\left(f(t)\right)(p) - f(0).$$

$$\mathcal{L}\left(f''(t)\right)(p) = p^2 \mathcal{L}\left(f(t)\right)(p) - p f(0) - f'(0).$$

$$\mathcal{L}\left(f'''(t)\right)(p) = p^3 \mathcal{L}\left(f(t)(p)\right) - p^2 f(0) - p f(0) - f^{(2)}(0).$$

• **Remarques :**

1/ dans la proposition (avec $n = 1$), f n'est pas continue en 0 mais $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+)$ existe, alors

$$\mathcal{L}\left(f'(t)\right)(p) = p \cdot \mathcal{L}\left(f(t)\right)(p) - f(0^+)$$

2/ Si, dans la proposition (avec $n = 1$), f est continue sauf en un nombre fini $t_1, \dots, t_m$, alors :

$$\mathcal{L}\left(f'(t)\right)(p) = p \cdot \mathcal{L}\left(f(t)\right)(p) - f(0) - \sum_{n=1}^{m} e^{-pt}\left(f(t_i^+) - f(t_i^-)\right)$$

2.6. Dérivée d'une transformation de Laplace :

Scanned with CamScanner

2.7. Transformée de Laplace d'une primitive :

- proposition 9 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace (T.L) en p.

Posons $F(t) = \int^t f(x)\,dx$ (primitive de f), alors f admet une TL. et on a :

$$\mathcal{L}(F(t))(p) = \frac{1}{p} \cdot \mathcal{L}(f(t))(p).$$

Scanned with CamScanner

2.7. Transformée de Laplace d'une primitive :

• proposition 9 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace (T.L) en p.

Posons $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ (primitive de f), alors f admet une TL. et on a :

$$\mathcal{L}(F(t))(p) = \frac{1}{p} \cdot \mathcal{L}(f(t))(p).$$

2.8. Transformée de Laplace des fcts périodiques :

• proposition 10 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant une T.L.

Si f est une périodique de période T, alors :

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \cdot \int_0^T f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

• Exemple :

Soit f une fonction périodique de période 1 définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t$. Alors :

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{1}{1 - e^{-p}} \int_0^T f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-p}} \int_0^T t e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-p}} \left(\left[-\frac{1}{p} t e^{-pt} \right]_0^T + \int_0^T \frac{1}{p} e^{-pt}\, dt \right) \quad \text{(par parties)}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-p}} \left(-\frac{T}{p} e^{-pT} - \frac{1}{p^2} (e^{-pT} - 1) \right)$$

$$= \frac{-e^{-p}}{p(1 - e^{-p})} + \frac{1}{p^2}$$

2.9. Transformée de Laplace et Conjugaison :

• proposition 11 :

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant une T.L en p.

Scanned with CamScanner

alors la fonction $\overline{f} : t \longrightarrow \overline{f(t)}$

Elle admet une T.L

De plus, on a : $\mathcal{L}\left(\overline{f(t)}\right)(p) = \overline{\mathcal{L}\left(f(t)\right)(p)}$

2.10. Transformée de Laplace d'un produit de Convolution

Définition : Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$

Leur produit de convolution $f * g$ est défini par :

$$f * g\,(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

Si f et g sont causales alors $f * g(x) = \int_0^{x} f(x-t)\, g(t)\, dt$

- Remarque :

Quand le produit de convolution est bien défini, alors il a de bonnes propriétés :

→ Associativité.

→ Commutativité.

- proposition 12 :

Soient $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant des T.L. alors $f * g$ admet une transformée de Laplace et on a : $\mathcal{L}\left(f * g(t)\right)(p) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)(p) \cdot \mathcal{L}\left(g(t)\right)(p)$.

- Remarque :

$$a(f * g) \leqslant \text{Max}\left(a(f), a(g)\right)$$

2.11. Continuité et limite :

Théorème : La transformée de Laplace d'une fonction objet (càd une fct admettant une T.L) est continue sur $\{z \in \mathbb{C} / \text{Re}(z) > a(f)\}$. De plus

$$\lim_{|p| \to +\infty} \mathcal{L}\left(f(t)\right)(p) = 0$$

Scanned with CamScanner

3. Transformée de Laplace inverse :

Problème : Etant donnée une fonction $F(p)$ est-elle possible de Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tq $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$.

Si f existe est-elle unique ?

- **Théorème 3.1 :**

Soient $f, g \in \mathcal{O}$ (deux fonctions objet)

→ Si $\mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}(g(t))(p)$, alors f et g sont égaux sauf éventuellement aux pts où elles ne sont pas continues (il n'y a au plus qu'un nombre fini de tels points).

→ Si f et g sont Continues et admettant la même T.L, alors elles sont égales ($f = g$)

- **Définition 3.2 :**

Soit $f \in \mathcal{O}$. Si $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$, alors on note $\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$.

On l'appelle la transformée inverse de Laplace.

Nous disposons du résultat suivant qui montre une sorte de Surjectivité

Théorème 3.3 :

Soit g une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > a\}$ et qui satisfait l'inégalité :

$$|g(z)| \leq \frac{K.e^{-M\,Re(z)}}{(1+|z|)^2}$$

Alors, il existe une unique fonction f objet ($f \in \mathcal{O}$) avec $a(f) = a$. continue et telle que

Scanned with CamScanner

$\mathcal{L}(f(t))(p) = g(p)$ pour tout p tel que $Re(p) > a = a(f)$.

Cette fct est donnée par $f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{D_b} g(z) e^{zt} dz$ (*)
où D_b est la droite verticale du plan Complexe des points d'abscisse b pour $b > a$ (on peut mq f ne dépend pas du choix de b)

- Remarques 3.4 :
  → En pratique, on n'utilise pas la définition intégrale de la transformée de Laplace inverse donnée dans (*)
  → Le plus pratique est de connaître un certain nombre de transformée de Laplace de base et d'utiliser les propriétés de la transformée de Laplace inverse : La linéarité ...

- Exemple 3.5 :
  puisque $\mathcal{L}(e^{-2t})(p) = \frac{1}{p+2}$
  alors $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right) = e^{-2t}$

- proposition 3.6 (Linéarité)

$$\mathcal{L}(\alpha F + \beta G)(t) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(F) + \beta \mathcal{L}^{-1}(G)(t) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

- proposition 3.8 :
  Si $\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$ alors $\mathcal{L}^{-1}(F(p-a)) = e^{at} f(t)$.

- proposition 3.10 :
  Si $\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$
  alors :

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-ap} F(p)) = f_a(t) = \begin{cases} f(t-a) & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Homothétie :

Si $L^{-1}(F(p)) = f(t)$, alors $L^{-1}(F(kp)) = \frac{1}{k} \cdot f(\frac{1}{k})$ $(k>0)$

- proposition 3.12

Si $L^{-1}(F(p)) = f(t)$, alors $L^{-1}(F^{(n)}(p)) = (-1)^n t^n f(t)$.

- proposition 3.13

Si $L^{-1}(F(p)) = f(t)$, alors $L^{-1}\left(\frac{F(p)}{p}\right) = \int_0^t f(x)\,dx$

- Exercice :

Mq : $L^{-1}\left(\frac{3}{p(p^2+9)}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(3t)$.

- proposition 3.14 :

Si $\begin{cases} L^{-1}(F(p)) = f(t) \\ \text{et } f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow L^{-1}(pF(p)) = f'(t)$.

Produit de Convolution

- proposition 3.15 :

Si $L^{-1}(F(p)) = f(t)$ et $L^{-1}(G(p)) = g(t)$ alors :

$L^{-1}(F(p) \cdot G(p)) = \int_0^t f(x)\, g(t-x)\,dx = f * g(t)$.

- Exercices :

1/ Déterminer $L^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)(p-2)}\right)$?

2/ Trouver $L^{-1}\left(\frac{p^2}{(p+3)^2}\right)$?

3/ Calculer l'origine $L^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right)$?

4/ Déterminer l'origine $L^{-1}\left(\frac{3}{(p+5)^2}\right)$?

IV. Applications de la transformée de Laplace aux éq. différentielles linéaires :

Scanned with CamScanner

Etant donné une équation différentielle linéaire à coefficients constants $a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = f(t)$

Problème : Trouver les solutions de (E) $y(t)$ $t \geq 0$. et vérifiant $y(0) = b_1, \dots, y^{(n+1)}(0) = b_{n-1}$

méthode : on cherche la transformée de Laplace des deux membres de l'équation (E), en utilisant le fait que $\mathcal{L}\left(y^{(k)}(t)\right)(p) = p^k \cdot \mathcal{L}\left(y(t)\right)(p) - p^{k-1} y(0) \dots - y^{(k-1)}(0)$.

Puis on utilise la transformer de Laplace inverse.

$$(E_1) \quad \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Notons $F(p) = \mathcal{L}\left(y(t)\right)(p)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(y'(t)\right)(p) = p \cdot \mathcal{L}\left(y(t)\right)(p) - y(0) = p F(p).$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(y''(t)\right)(p) = p^2 \mathcal{L}\left(y(t)\right)(p) - p y(0) - y'(0).$$

$$= p^2 F(p).$$

$$\mathcal{L}(t)(p) = \frac{1}{p^2}.$$

$$(E) \Leftrightarrow p^2 \cdot F(p) + 3p F(p) + 2 F(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{p^2\left(p^2 + 3p + 2\right)} = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p+2}$$

(c'est la décomposition en éléments simples).

Comme $\mathcal{L}^{-1}(1/p^2) = t$, $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) = e^{-t}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right) = e^{-2t}$$

Donc : $$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$$

Scanned with CamScanner

• Exemple 2 :

Résoudre l'équation différentielle sur $[0, +\infty[$

$$(E_2) : \quad y'' + y = 3.\sin(2t)$$

avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

• on pose $F(p) = \mathcal{L}(y(t))(p)$

$$\mathcal{L}(y''(t))(p) = p^2 F(p) - p\,y(0) - y'(0)$$
$$= p^2 F(p) - p - 2.$$

$$\mathcal{L}(\sin(2t))(p) = \frac{2}{p^2+4}.$$

$$(E_2) \Rightarrow p^2 F(p) - p - 2 + F(p) = \frac{6}{p^2+4}$$

$$\Rightarrow F(t)(p^2+1) = \frac{6}{p^2+4} + p + 2.$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{6}{(p^2+4)(p^2+1)} + \frac{p+2}{p^2+1}$$
$$= \frac{p}{p^2+1} + 2.\frac{1}{p^2+1} + \left(-\frac{2}{p^2+4} + 2 - \frac{1}{p^2+1}\right)$$

Comme $\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = \cos(t) \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin(t) \end{cases}$ $\qquad \mathcal{L}\left(\frac{1}{p^2+4}\right) = \sin(2t)$

D'où $y(t) = \cos(t) + 2\sin(t) - \sin(2t) + 2\sin(t)$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \cos(t) + 4.\sin(t) - \sin(2t)}$$

2. Transformée de Fourier :

Déf : $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localement intégrable / $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ Converge $\}$.

Exemple :

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\,dt = \lim_{R \to +\infty} 2.\int_0^R \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Scanned with CamScanner

$= \lim_{R \to +\infty} 2. \arctan(R) = 2.\frac{\pi}{2} = \pi.$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^{-1}(\mathbb{R})$.

2/ $f(t) = t$

f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (Continue).

mais $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, dt$ Diverge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, dt = \lim_{R \to +\infty} . 2. \int_{0}^{R} t . dt$$

$$= \lim_{R \to +\infty} R^2 = +\infty.$$

Définition 2.3 : Soit $f \in L^1$.

on appelle transformée de Fourier de f la fonction $F(f) = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$F(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . e^{-2i\omega\pi t}\, dt$$

on note aussi $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.

L'application $\mathcal{F} : f \mapsto F(f)$ est appelée la transformation de Fourier.

$F(f)(\omega)$ est définie par une intégrale dépendant du paramètre réel ω, par contre la transformée de Laplace le paramètre p est un complexe.

On admet que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est bornée, Continue Sur $\mathbb{R}$.

. Remarque 2.4

La définition précédante de la transforma de Fourier n'est pas toujours celle choisie, on peut trouver les définitions suivantes :

Scanned with CamScanner

1/ $\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

2/ $\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

• Remarque 2.5 :

Au point de vue physique, on dit que :

• La fonction d'origine f dépend du temps : elle est définie dans le domaine temporel.

• La fonction $\hat{f}$ dépend de la fréquence ω, elle est définie dans le domaine fréquentiel.

→ Le spectre d'amplitude $|\hat{f}(\omega)|$ de f.

→ Le spectre de graphe $\arg(\hat{f})$

→ La densité spectrale d'energie $|\hat{f}(\omega)|^2$

• Exemple 2.6 :

on considère la fonction échlon unité de Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que $H(t)$ n'admet pas de T.F.

• proposition 2.7 (T.F et parité)

1/ Si f est paire, alors sa transformée de Fourier est à valeurs réelles et elle est paire aussi.

2/ Si f est impaire, alors sa Transformée de Fourier est impaire et on a :

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = -2i \int_{0}^{+\infty} f(t)\, \text{Sin}(2\pi\omega t)\, dt$$

3. Exemple de Transformation :

3.1. L'impulsion rectangulaire :

Scanned with CamScanner

Soit $a > 0$, l'impulsion rectangulaire p_a de la hauteur 1 et de durée est définie par :

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

- la fct $\hat{f}$ dépend de la fréquence ω : elle est définie dans la domaine fréquentiel
- Le spectre d'amplitude $|\hat{f}(\omega)|$ de f
- Le spectre de graphe : $\arg(\hat{f})$
- La densité spectrale d'énergie $|\hat{f}(\omega)|^2$

Exemple : on considère la fct échelon unité de Heasvide $H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & \geq 0 \end{cases}$

proposition (T.F et parité)

(1) Si f est paire, alors sa transformée de Fourier, est à valeurs réelle et elle est paire aussi :

(2) si f est impaire, alors sa transformée de Fourier est impaire et on a :

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\omega t)\,dt$$

I - Exemple de transformation

3-1 l'impulsion rectangulaire

Soit $a>0$, l'impulsion rectangulaire φ_a de la hauteur 1 et de la durée a est définie par : $\varphi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq a/2 \\ 0 & |t| > a/2 \end{cases}$

Rq : $t \to \varphi_a(t)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, mais $\omega \to \hat{\varphi}_a(\omega)$ n'est pas absolument intégrable (leap)

Cas particulier.

Si $a = 1$, φ_1 est appelle "signale porte" notée $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(voir TD)

3-2 - fonction exponentielles

Soit $a>0$ on considère la fct f telle que $f(t) = e^{-a|t|}$

f est absolument intégrable

f est paire.

3-3 - Fonction Gaussienne

Soit $a>0$, la fct gaussienne est définie par. $g_a(t) = e^{-at^2}$

- On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, donc la fct g_a est absolument intégrable.

g_a est paire.

III - Lien entre T de Laplace et T de Fourier

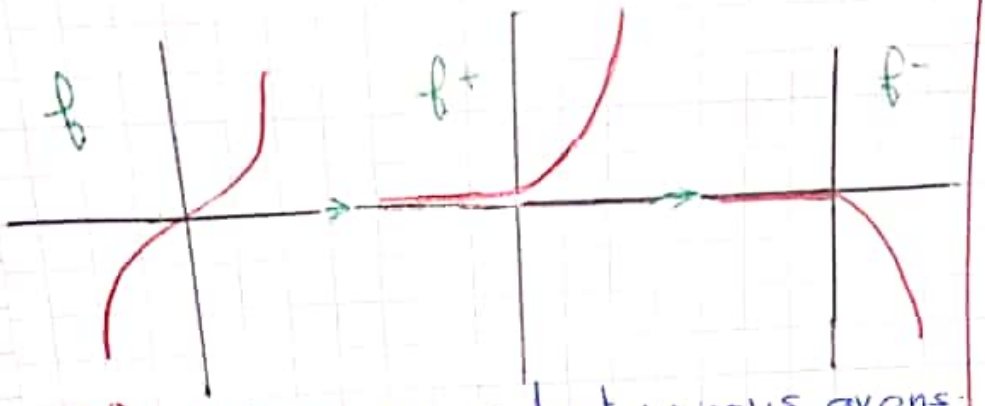
Pour $t \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit les fcts f^+ et f^- telle que

$$\begin{cases} t \geq 0 & f^+(t) = f(t) \text{ et } f^-(t) = f(-t) \\ t < 0 & f^+(t) = 0 \text{ et } f^-(t) = 0 \end{cases}$$

Exemple : $f(t) = t^3$

$$\begin{cases} t \geq 0 & f^+(t) = t^3 \text{ et } f^-(t) = -t^3 \\ t < 0 & f^+(t) = 0 \text{ et } f^-(t) = 0 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner



Théorème : pour tout ω nous avons :

$$\mathcal{F}(\hat{f})(\omega) = \mathcal{L}(f^+(t))(2i\pi\omega) + \mathcal{L}(f^-(t))(-2i\pi\omega)$$

Cas particulier :

Si $f(t) = 0$ pour tout $t \neq 0$ alors :

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{L}(f(t))(2i\pi\omega)$$

Scanned with CamScanner

Transformée de Fourier

12 avril 2020

Scanned with CamScanner

1. Transformée de Fourier.
2. Exemple de Transformation
3. Lien entre T. de Laplace et T. de Fourier
4. Propriété de la Transformée de Laplace
5. La transformée de Fourier Inverse

Scanned with CamScanner

0. Introduction.

Scanned with CamScanner

1. Transformée de Fourier.

Définition 1.1

On note
$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *localement integrable* / $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid dt$ *converge*$\}$

Exemple 1.2

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(t) = t$

Vérifier que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et que $g \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Scanned with CamScanner

Définition 1.3

Soit $f \in \mathcal{L}^1$.
On appelle **transformée de Fourier** de f la fonction, $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\omega t}dt.$$

On note aussi $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.
L'application $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est appelée **la transformation de Fourier** .

$\mathcal{F}(f)(\omega)$ est définie par une intégrale dépendant du paramètre réel ω, par contre la transformée de Laplace le paramètre p est un complexe.
On admet que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est bornée, continue sur $\mathbb{R}$.

Scanned with CamScanner

Remarque 1.4 ***(Avertissement)***

La définition précédente de la transformée de Fourier n'est pas toujours celle choisie.On peut trouver les définitions suivantes :
(1)

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

(2)

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

la définition retenue peut entraîner des modifications dans certaines propriétés.
Il faut donc toujours vérifier la définition employer avant d'appliquer une formule.

Scanned with CamScanner

Remarque 1.5 (Terminologie)

Du point de vue physique, on dit que :

- la fonction d'origine f dépend du temps : elle est définie dans le domaine temporel
- la fonction $\hat{f}$ dépend de la fréquence ω : elle est définie dans le domaine fréquentiel.
- Le spectre d'amplitude $\mid \hat{f}(\omega) \mid$ de f.
- Le spectre de graphe :$arg(\hat{f})$.
- La densité spectrale d'énergie : $\mid \hat{f}(\omega) \mid^2$.

Scanned with CamScanner

Exemple 1.6

On considère la fonction échelon unité de Heasvide

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Soit $\omega \in \mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)e^{-2i\pi\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\omega t}dt$

$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)e^{-2i\pi\omega t}dt = \frac{i}{2\pi\omega} \lim_{R\to+\infty}(e^{-2i\pi\omega t} - 1)$

Donc la Transformée de Fourier de H n'existe pas.

Scanned with CamScanner

Proposition 1.7 (T.F et parité)

(1) Si f est paire, alors sa Transformée de Fourier, est à valeurs réelle et elle est paire aussi.
(2) Si f est impaire, alors sa Transformée de Fourier est impaire et on a

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\omega t) dt.$$

Preuve :

Scanned with CamScanner

2. Exemple de Transformation.

2.1 L'impulsion rectangulaire

Soit $a > 0$, l'impulsion rectangulaire ρ_a de la hauteur 1 et de durée a est définie par :

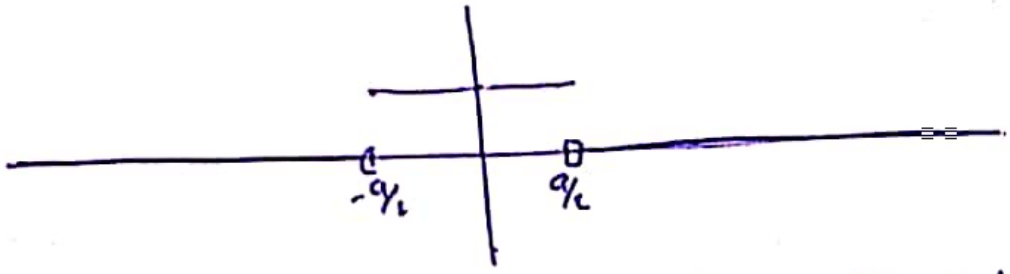
$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leqslant \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

Preuve :

Scanned with CamScanner

Exemple 3.1 : L'impulsion rectangulaire

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



- ρ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$: continue par morceaux.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |\rho(t)|\,dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dt < \infty$

$\Rightarrow \rho \in L^1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(\rho)(w) = \hat{\rho}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\, e^{-2i\pi w t}\, dt$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \rho(t) \cos(2\pi w t)\, dt$$

$$= 2\int_0^{a/2} \cos(2\pi w t)\, dt$$

Si $w \neq 0$

$$= \frac{2}{2\pi w}\left[\sin(2\pi w t)\right]_0^{a/2}$$

$$= \frac{\sin(\pi a w)}{\pi w}.$$

- Si $w = 0$ $\quad \hat{\rho}(0) = 2\int_0^{a/2} dt = a.$

Rque : $\lim_{w \to 0} \hat{\rho}(w) = \lim_{w \to 0} \frac{\sin(\pi w a)}{\pi w} = a = \hat{\rho}(0)$

Donc $\hat{\rho}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

2.2 Fonctions exponentielles

Soit $a > 0$, on considère la fonction f telle que $f(t) = e^{-a|t|}$.
f est absolument intégrable
f est paire

Scanned with CamScanner

Exemple 3.2 Fonction exponentielle.

$f(t) = e^{-a|t|}$ $\quad a>0$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ en effet $\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x 2e^{-at}\,dt \end{cases}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{a}\left[e^{-at}\right]_0^x$$

$$= \frac{2}{a} < \infty$$

1

- f est paire donc sa transformée de Fourier est donnée par:

$$\hat{f}(w) = 2\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(2\pi w t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} 2\underbrace{\int_0^x e^{-at}\cos(2\pi w t)\,dt}_{I_x}$$

- Pour $w \neq 0$ une intégration partie donne.

$$I_x = \left[\frac{e^{-at}\sin(2\pi w t)}{2\pi w}\right]_0^x + \int_0^x \frac{a\,e^{-at}\sin(2\pi w t)}{2\pi w}\,dt$$

$$= \frac{e^{-ax}\sin(2\pi w x)}{2\pi w} + \frac{a}{2\pi w}\left\{\left[\frac{-e^{-at}\cos(2\pi w t)}{2\pi w}\right]_0^x - \int_0^x \frac{a}{2\pi w} e^{-at}\cos(2\pi w t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{e^{-ax}\sin(2\pi w x)}{2\pi w} + \frac{a}{(2\pi w)^2}\left(1 - e^{-ax}\cos(2\pi w x)\right) - \frac{a^2}{(2\pi w)^2} I_x$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{(2\pi w)^2}\right) I_x = \frac{e^{-ax}\sin(2\pi w x)}{2\pi w} + \frac{a}{(2\pi w)^2}\left(1 - e^{-ax}\cos(2\pi w x)\right)$$

Comme: $\begin{cases} |e^{-ax}\sin(2\pi w x)| \le e^{-ax} \\ |e^{-ax}\cos(2\pi w x)| \le e^{-ax} \end{cases}$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0$

alors $\lim_{x\to+\infty} e^{-ax}\sin(2\pi w x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-ax}\cos(2\pi w x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} I_x = \frac{a}{(2\pi w)^2} \times \frac{(2\pi w)^2}{(2\pi w)^2 + a^2} = \frac{a}{a^2 + (2\pi w)^2}$$

d'où $\quad \hat{f}(w) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi w)^2}$

Scanned with CamScanner

Pour $w=0$

$$\hat{f}(0) = 2\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{2}{-a}\left[e^{-at}\right]_0^{x\to+\infty} = \frac{2}{a}.$$

Rque. $\lim_{w\to 0} \hat{f}(w) = f(0)$

$\Rightarrow \hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- $\lim_{w\to+\infty} \hat{f}(w) = 0$.

Scanned with CamScanner

2.3 Fonction Gaussienne

Soit $a > 0$, la fonction Gaussienne est définie par

$$g_a(t) = e^{-at^2}$$

.

On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$
Donc, avec le changement de variable : $x = \sqrt{a}.t$ on obtient
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} < \infty$
donc la fonction g_a est absolument intégrable.
Pour déterminer la Transformée de Fourier de g_a, on a besoin de **la dérivabilité sous intégrale** .

Scanned with CamScanner

Th Dérivation sous intégrale

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \to \mathbb{K}$ une fonction.
On suppose que :

- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I,
- f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ définie sur $J \times I$,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto$ $dfrac\partial f\partial x(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J,
- Il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable telle que, pour tout $x \in J$ et tout $t \in I$, $| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) | \leqslant g(t)$.

Alors la fonction $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur J et on pour tout $t \in J$

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Scanned with CamScanner

3. Fonction gaussienne.

puisque la fonction g_a est paire, alors

$$g_a(\omega) = 2\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\cos(2\pi\omega t)dt$$

- $t \mapsto e^{-at^2}\cos(2\pi\omega t)$ est absolument intégrable :

en effet : $\int_0^{+\infty} \mid e^{-at^2}\cos(2\pi\omega t) \mid dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-at^2}dt < \infty$.

- $\omega \mapsto e^{-at^2}\cos(2\pi\omega t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
- $\forall t \in [0, +\infty[\ \forall \omega \in \mathbb{R}$:

$$\mid \frac{\partial}{\partial\omega}(e^{-at^2}\cos(2\pi\omega t)) \mid = \mid -2\pi t e^{-at^2}\sin(2\pi\omega t) \mid \leqslant \phi(t) = 2\pi t e^{-at^2}.$$

et $\int_0^{\infty}\phi(t) = \lim_{R\to+\infty} -\frac{\pi}{a}e^{-aR^2} + \frac{\pi}{a} < \infty$.

Scanned with CamScanner

3. Fonction gaussienne.

D'après le th. de dérivation soue intégrale,

$$(\hat{g}_a)'(\omega) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\omega}(e^{-at^2}\cos(2\pi\omega t))dt$$

$$(\hat{g}_a)'(\omega) = -2\int_0^{+\infty} 2\pi t e^{-at^2}\sin(2\pi\omega t)dt$$

$$(\hat{g}_a)'(\omega) = \frac{2\pi}{a}\int_0^{+\infty} -2ate^{-at^2}\sin(2\pi\omega t)dt$$

$$(\hat{g}_a)'(\omega) = \frac{2\pi}{a}\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(e^{-at^2})\sin(2\pi\omega t)dt$$

une intégration par parties nous permet d'écrire :

$$(\hat{g}_a)'(\omega) = \lim_{R\to+\infty}\{\frac{2\pi}{a}[e^{-aR^2}\sin(2\pi\omega R)] - \frac{2\pi}{a}\int_0^R 2\pi\omega e^{-at^2}\cos(2\pi\omega t)dt\}$$

$$(\hat{g}_a)'(\omega) = \lim_{R\to+\infty}\frac{2\pi}{a}[e^{-aR^2}\sin(2\pi\omega R)] - \frac{2(\pi)^2}{a}\omega\int_0^{\infty} 2e^{-at^2}\cos(2\pi\omega t)dt$$

Scanned with CamScanner

3. Fonction gaussienne.

D'autre part, $\lim_{R\to+\infty} \frac{2\pi}{a}[e^{-aR^2}\sin(2\pi\omega R)] = 0.$

et $\lim_{R\to+\infty} 2e^{-at^2}\cos(2\pi\omega t)dt = \hat{g}_a(\omega)$. Donc (E)

$(\hat{g}_a)'(\omega) = -\frac{(2\pi)^2}{a}\omega\hat{g}_a(\omega).$

c'est une équation différentielle de 1er degré.

$(E) \Longrightarrow \frac{(\hat{g}_a)'(\omega)}{\hat{g}_a(\omega)} = -\frac{2(\pi)^2}{a}\omega$

donc

$$\hat{g}_a(\omega) = \alpha e^{-\frac{\pi^2}{a}\omega^2}$$

déterminons α

Pour $\omega = 0$ on a $\hat{g}_a(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

donc $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Scanned with CamScanner

3. Fonction gaussienne.

Conclusion

$$\hat{g}_a(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\omega^2}$$

Remarque

$\hat{g}_a(\omega)$ est une fonction continue à valeurs réelles et on a : $\lim_{\omega \to \infty} \hat{g}_a(\omega) = 0$

Scanned with CamScanner

Exemple 2.3: Fonction Gaussienne

$$g_a(t) = e^{-at^2} \qquad a>0.$$

On sait que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ (l'intégrale de Gauss)

- g est continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ localement intég. sur $\mathbb{R}$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt$ on pose $x = \sqrt{a}\,t$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} < \infty$$

Donc g est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow g \in L^1(\mathbb{R})$.

donc $\hat{g}(w) = 2\int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(2\pi w t)\,dt$

puisque g est paire

Scanned with CamScanner

On a: • $t \mapsto e^{-at^2}\cos(2\pi wt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{car} \int |e^{-at^2}\cos(2\pi wt)| \leq \int e^{-at^2} dt < +\infty.$$

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$; $w \mapsto e^{-at^2}\cos(2\pi wt)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

(La dérivée par rapport à w)

• $\forall t \in [0, +\infty[$. $\forall w \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial w}\left(e^{-at^2}\cos(2\pi wt)\right)\right| = \left|2\pi t\, e^{-at^2}\sin(2\pi wt)\right|$$

$$\leq 2\pi t e^{-at^2} = \varphi(t)$$

et $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x -\frac{\pi}{a}(-at^2)' e^{-at^2} dt$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{\pi}{a} e^{-at^2}\right]_0^x = \frac{\pi}{a} < +\infty.$$

(Car $\frac{\partial}{\partial w}(e^{-at}\cos(2\pi wt))$ est dominée par une fonction intég—

Donc on peut dériver sous intégrale. Car:

$$\frac{d}{dw}(\hat{g}(w)) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial w}\left(e^{-at^2}\cos(2\pi wt)\right) dt$$

$$= -2\int_0^{+\infty} 2\pi t\, e^{-at}\sin(2\pi wt)\,dt \qquad \left(e^{-at^2}\right)' = -2ate^{-at^2}$$

$$= \frac{2\pi}{a}\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(e^{-at^2}\right)\sin(2\pi wt)\,dt$$

une intégration par partie donne:

$$\hat{g}'(w) = \lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{2\pi}{a}\left[\underbrace{e^{-at^2}\sin(2\pi wt)}_{\to 0}\right]_0^x - \frac{2\pi}{a}\int_0^x 2\pi w\, e^{-at^2}\cos(2\pi wt)\,dt\right.$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\pi}{a} e^{-ax^2}\sin(2\pi wx) - \frac{4\pi^2}{a} w \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} 2e^{-at^2}\cos$$

Scanned with CamScanner

D'autre part: $|e^{-ax^2}\sin(2\pi wx)| \leq e^{-ax^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x 2e^{-at^2}\cos(2\pi wt)\,dt = \hat{g}(w)$$

Donc $\boxed{\hat{g}'(w) = -\frac{2\pi^2}{a} w\, \hat{g}(w)}$ (E) c'est une equation differentielle de 1er degré

(E) $\dfrac{\hat{g}'(w)}{\hat{g}(w)} = -\dfrac{2\pi^2}{a} w$

$\Rightarrow \ln(|\hat{g}_a(w)|) = -\dfrac{\pi^2}{a} w^2 + c$

$\Rightarrow \hat{g}(w) = \alpha\, e^{-\frac{\pi^2}{a} w^2}$

$\Rightarrow$ Reste à determiner α:

Pour $w=0 \Rightarrow \hat{g}(0) = \alpha$.

et $\hat{g}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Conclusion $\hat{g}_a(w) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a} w^2}$

Rque: $\hat{g}_a$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Scanned with CamScanner

3. Lien entre T. de Laplace et T. de Fourier

Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit les fonctions f^+ et f^- telles que :

$$\begin{cases} t \geqslant 0; & f^+(t) = f(t) \quad et \quad f^-(t) = f(-t) \\ t < 0; & f^+(t) = 0 \quad et \quad f^-(t) = 0 \end{cases}$$

Par exemple $f(t) = t^3$

$$\begin{cases} t \geqslant 0; & f^+(t) = t^3 \quad et \quad f^-(t) = -t^3 \\ t < 0; & f^+(t) = 0 \quad et \quad f^-(t) = 0 \end{cases}$$

Tracer les courbes de f, f^+ et de f^-.

Scanned with CamScanner

Théorème 3.1

Pour tout ω nous avons

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{L}(f^+)(2i\pi\omega) + \mathcal{L}(f^-)(-2i\pi\omega)$$

Cas particulier Si $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$, alors

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{L}(f(t))(2i\pi\omega)$$

Preuve du théorème $\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\omega t}dt$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-2i\pi\omega t}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\omega t}$$

dans la 1er intégrale on pose $u = -t$, on obtient

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{+\infty}^{0} -f(-u)e^{2i\pi\omega u}du + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\omega t}$$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{0}^{+\infty} f^-(t)e^{2i\pi\omega t}dt + \int_{0}^{+\infty} f^+(t)e^{-2i\pi\omega t}$$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{L}(f^+)(2i\pi\omega) + \mathcal{L}(f^-)(-2i\pi\omega)$$

Scanned with CamScanner

Exemple 3.1

Reprenons l'exemple 2.2, $f(t) = e^{-a|t|}$ où $a > 0$
on a $\forall t \geqslant 0 : f^+(t) = f(t) = e^{-at}$ et $f^-(t) = f(-t) = e^{-at}$
$\forall t < 0 : f^+(t) = 0$ et $f^-(t) = 0$

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{L}(f^+)(2i\pi\omega) + \mathcal{L}(f^-)(-2i\pi\omega)$$

Comme $\mathcal{L}(e^{-at})(p) = \dfrac{1}{p+a}$ alors

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2i\pi\omega + a} + \frac{1}{-2i\pi\omega + a} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\omega^2}$$

Exercice 01

On considère la fonction triangle définie par :

$$\begin{cases} \Lambda(t) = 1 - \mid t \mid & t \in [-1, 1] \\ \Lambda(t) = 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la transformée de Fourier par deux méthodes différentes.

Scanned with CamScanner

4. Propriétés de la Transformée de Fourier

Remarque

La relation établit précédemment entre la Transformée de Laplace et celle de Fourier nous permet de dire que les propriétés de T.L et T.F sont semblables.

4.1 Linéarité

Soient f et g deux fonctions admettant une Transformée de Fourier Alors, pour tout scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\omega) = \alpha \mathcal{F}(f)(\omega) + \beta \mathcal{F}(g)(\omega).$$

Preuve : Provient directement de la linéarité de l'intégrale.

Scanned with CamScanner

4.2 Conjugaison

Proposition

Si f este un fonction admettant une Transformée de Fourier, alors la fonction conjugué : $\bar{f} : t \mapsto \overline{f(t)}$ admet également une T. de Fourier et on a :

$$\mathcal{F}(\bar{f})(\omega) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\omega)}.$$

En effet :

$\mathcal{F}(\bar{f})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-2\pi\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi\omega t} dt} = \overline{\mathcal{F}(f)(-\omega)}$

Scanned with CamScanner

4.3 Décalage dans le domaine temporel

Proposition

Soit f est fonction admettant une Transformée de Fourier.
Pour $a > 0$ on définit la fonction $g : t \mapsto f(t-a)$.
Alors la fonction g admet une T. de Fourier et on a :

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = e^{-2i\pi\omega a}\mathcal{F}(f)(\omega).$$

Le facteur $e^{-2i\pi\omega a}$ est appelé :**facteur de phase**. **Preuve :**

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-2i\pi\omega t}dt.$$

on pose $x = t - a$, on obtient :

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\omega a}.e^{-2i\pi\omega x}dx = e^{-2i\pi\omega a}.\mathcal{F}(f)(\omega).$$

Scanned with CamScanner

4.4 Décalage dans le domaine fréquentiel

Proposition

Soit f une fonction admettant une Transformée de Fourier.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit $f_\alpha : t \mapsto e^{2i\pi\alpha t} f(t)$.
Alors la fonction f_α admet une T.F et on a :

$$\mathcal{F}(f_\alpha)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega - \alpha).$$

Preuve

$$\mathcal{F}(f_\alpha)(\omega - \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi(\omega-\alpha)t} dt.$$

$$\mathcal{F}(f_\alpha)(\omega - \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t) e^{-2i\pi(\omega)t} dt = \mathcal{F}(f_\alpha)(\omega).$$

Scanned with CamScanner

Corollaire

Soit f une fonction admettant une Transformée de Fourier.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit $h : t \mapsto f(t).\cos(\alpha t)$.
Alors la fonction h admet une T. de Fourier et on a :

$$\mathcal{F}(h)(\omega) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(f)(\omega - \alpha) + \mathcal{F}(f)(\omega + \alpha)).$$

En effet

$\cos(\alpha t) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}) \implies h(t) = f_\alpha(t) + f_{-\alpha}(t)$

donc

$$\mathcal{F}(h)(\omega) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(f_\alpha)(\omega) + \mathcal{F}(f_{-\alpha})(\omega)).$$

$$\mathcal{F}(h)(\omega) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(f)(\omega - \alpha) + \mathcal{F}(f)(\omega + \alpha)).$$

Scanned with CamScanner

4.5 Dilatation dans le domaine temporel

Proposition

Soit f fonction admettant une Transformée de Fourier.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on définit $g : t \mapsto f(\lambda t)$.
Alors la fonction g admet une T. de Fourier et on a :

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{|\lambda|}\mathcal{F}(f)(\frac{\omega}{\lambda}).$$

Cas spécial $\lambda = -1$ $g(t) = f(-t)$

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(-\omega).$$

Preuve :
Si $\lambda > 0$: $\mathcal{F}(g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda t)e^{-2i\pi\omega t}dt$

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\frac{\omega}{\lambda}t}dt = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}(f)(\frac{\omega}{\lambda}).$$

Même démarche pour $\lambda < 0$.

Scanned with CamScanner

4.6 Dérivation dans le domaine temporel

Proposition

Soit f une fonction de classe C^1 admettant une Transformée de Fourier.
Supposons que $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$
Alors la fonction dérivée f' admet une T. de Fourier et on a :

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = 2i\pi\omega\mathcal{F}(f)(\omega).$$

Preuve

Par intégration par parties, on a :
$\int_A^B f'(t).e^{-2i\pi\omega t}dt =$
$[f(B).e^{-2i\pi\omega B} - f(A).e^{-2i\pi\omega A}] + 2i\pi\omega \int_A^B f(t).e^{-2i\pi\omega t}dt.$
Comme $\mid f(t)e^{-2i\pi\omega t} \mid \leqslant \mid f(t) \mid$
alors $\lim_{A\to+\infty} f(A)e^{-2i\pi\omega A} = 0$ et $\lim_{B\to+\infty} f(B)e^{-2i\pi\omega B} = 0.$
D'où

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = 2i\pi\omega\mathcal{F}(f)(\omega).$$

Scanned with CamScanner

4.6 Dérivation dans le domaine temporel

Corollaire

Soit f une fonction de classe C^n admettant une Transformée de Fourier.
Supposons que $\lim_{t\to\infty} f^{(k)}(t) = 0$, pour $k = 0...n-1$.
Alors la fonction dérivée $f^{(n)}$ admet une T. de Fourier et on a :

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega) = (2i\pi\omega)^n \mathcal{F}(f)(\omega).$$

Scanned with CamScanner

4.6 Dérivation dans le domaine temporel

Exemple

On considère la fonction Gaussienne $g_a(t) = e^{-at^2}$ $(a > 0)$.
g_a est de classe C^1.
$g_a'(t) = -2ag_a(t)$,
$\lim_{|t|\to\infty} g_a(t) = 0$
Il s'en suit que

$$\mathcal{F}(g_a')(\omega) = 2i\pi\omega\mathcal{F}(g_a)(\omega).$$

Scanned with CamScanner

4.7 Dérivation dans le domaine fréquentiel

Proposition (admise)

Soit f une fonction admettant une Transformée de Fourier.
Si la fonction $g : t \to tf(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
Alors

$$\frac{d}{d\omega}(\mathcal{F}(f)(\omega)) = -2i\pi\mathcal{F}(g)(\omega).$$

Corollaire

Supposons que $f, tf...t^n f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
Alors la fonction $\mathcal{F}(f)$ est n dérivable et on a :

$$\mathcal{F}(f)^{(n)}(\omega) = (-2i\pi)^n\mathcal{F}(g_n)(\omega).$$

où $g_n(t) = t^n f(t)$.

$$\mathcal{F}(f)^{(2)}(\omega) = (-2i\pi)^2\mathcal{F}(g_2)(\omega).$$

Exemple : $g(t) = t\rho_a(t)$

Scanned with CamScanner

4.8 Intégration

Proposition (admise)

Soit f une fonction continue telle que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\lim_{|R|\to\infty} \int_{-R}^{R} f(t)dt = 0$.
Alors, pour tout $\omega \neq 0$

$$\mathcal{F}(F)(\omega) = \frac{1}{2i\pi\omega}\mathcal{F}(f)(\omega),$$

où $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$.

Preuve :
f est continue $\Longrightarrow$ F est de classe C^1
Par hypothèse, $\lim_{|t|\to\infty} F(t)dt = 0$.
D'après la dérivation dans le domaine temporel,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(F')(\omega) = 2i\pi\omega\mathcal{F}(F)(\omega),$$

ce qui prouve que le résultat.

Scanned with CamScanner

4.9 Produit de convolution

Proposition (admise)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, absolument intégrables et bornées.
Alors la fonction $f \star g : t \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)dx$ est absolument intégrable et on a

$$\mathcal{F}(f \star g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega).\mathcal{F}(g)(\omega)$$

Preuve :
$f \star g \in \mathcal{L}^1$: évident.
$\mathcal{F}(f \star g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f \star g(t).e^{-2i\pi\omega t}$
$\mathcal{F}(f \star g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)dx).e^{-2i\pi\omega t}$
avec un changement de variable, on obtient

$$\mathcal{F}(f \star g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x).e^{-2i\pi\omega t}.e^{-2i\pi\omega u}du.dt$$

c.à.d $\mathcal{F}(f \star g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega).\mathcal{F}(g)(\omega)$.

Scanned with CamScanner

5. La transformée de Fourier Inverse

Définition 5.1

Soit f une fonction
On appelle Transformée de Fourier **conjugué** de f la fonction définie par :

$$\bar{\mathcal{F}}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi\omega t}dx$$

Scanned with CamScanner

On admit le théorème suivant

Théorème 5.2

Si f et $\mathcal{F}(f)$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
Alors

$$\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$$

où $f(t^+)$ et $f(t^-)$ sont, respectivement, limite à droite et limite à gauche de f en t
Si f est continue en t alors :

$$\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(t) = f(t).$$

On peut écrire également :

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\omega t}dx \iff f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)e^{2i\pi\omega t}d\omega$$

Remarque : pour la définition

Scanned with CamScanner

Remarque 5.3

Ces formules nous montre que la Transformée de Fourier peut être inversée :
La transformée inverse est $\bar{\mathcal{F}}$ que l'on pourrait notée $\mathcal{F}^{-1}$.
Ces résultat sont particulièrement important quand on utilise l'opérateur $\mathcal{F}^{-1}$ pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

Scanned with CamScanner

Proposition 5.4 (injectivité de la T.F)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Si $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, alors $f(t) = g(t)$ en tout point où f et g sont continues

Scanned with CamScanner

Théorème 5.5

Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que f et f' sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
Alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{+a} \hat{f}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$$

où $f(t^+)$ et $f(t^-)$ sont, respectivement, limite à droite et limite à gauche de f en t
Si f est continue en t alors :

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{+a} \hat{f}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega = f(t)$$

Exemple

Voir exercice 2 (TD).

Scanned with CamScanner

5.5 Convolution dans le domaine fréquentiel

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite de carré sommable sur $\mathbb{R}$
Si $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid^2 dt$ existe entant que intégrale impropre de Riemann.

Une fonction absolument intégrable n'est pas nécessairement à carré sommable.
Par exemple la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mid t \mid}}; & -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

est absolument intégrable, par contre la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mid t \mid}$ n'est pas intégrable sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Scanned with CamScanner

5.5 Convolution dans le domaine fréquentiel

Proposition (admise)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de carré sommable sur $\mathbb{R}$.
Alors $\hat{f} \star \hat{g}$ est la Transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto f(t)g(t)$.

Scanned with CamScanner

5.6 Égalité de Parseval.

Mathématicien français Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836).

Théorème 4. (Égalité de Parseval)

Soient f et g deux fonctions C^1 par morceaux, absolument intégrables et de carré sommable sur $\mathbb{R}$
Alors nous avons l'égalité de Parseval suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega.$$

En particulier, en prenant $f = g$, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, f(t)\,|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\, \hat{f}(\omega)\,|^2\, d\omega.$$

Il résulte de cette égalité que $\hat{f}$ est aussi de carré sommable.

Scanned with CamScanner

6.3 Égalité de Parseval.

Preuve :

D'après la propriété de convolution fréquentiel, on a :

$\mathcal{L}(f.g)(\omega) = \mathcal{L}(f) \star \mathcal{L}(g)(\omega)$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(t).e^{-2i\pi\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u).\hat{g}(\omega - u)du.$$

Pour $\omega = 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u).\hat{g}(-u)du.$$

En remplaçant g par $\overline{g}$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\overline{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u).\hat{\overline{g}}(-u)du.$$

Comme $\hat{g}(-u) = \overline{\hat{g}}(u)$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\overline{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u).\overline{\hat{g}(u)}du.$$

Scanned with CamScanner

Fonctions holomorphes

18 avril 2020

Scanned with CamScanner

1 Fonctions Complexes

2 Fonctions Holomorphes

3 Fonctions Harmoniques

Scanned with CamScanner

1. Fonctions Complexes.

Scanned with CamScanner

1.1 Un peu de topologie du plan complexe.

Le corps $\mathbb{C}$, des nombres complexes, est un espace vectoriel réel de dimension 2 dont la base canonique est $B = \{1, i\}$.
On peut identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ par l'isomorphisme $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$

$$\phi(z = a + ib) = (a, b).$$

Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, le module $\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$ induit une distance sur $\mathbb{C}$

$$d(z_1, z_2) = \mid z_1 - z_2 \mid$$

qui fait de $\mathbb{C}$ un espace métrique, dans lequel on peut définir les disques ouvert et fermé.
Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ on note :

- $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} / \mid z - z_0 \mid < R\}$: **le disque ouvert** de centre z_0 et de rayon R.
- $\overline{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} / \mid z - z_0 \mid \leqslant R\}$: **le disque fermé** de centre z_0 et de rayon R.
- $C(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} / \mid z - z_0 \mid = R\}$: le **cercle** de centre z_0 et de rayon R.

Scanned with CamScanner

Soit Ω une partie de $\mathbb{C}$

- Ω est dite ouverte de $\mathbb{C} \iff (\forall z \in \Omega)\ (\exists r > 0)$ tque : $D(z, r) \subset \Omega$.
- Ω est borné $\iff \exists R > 0$ tel que $\Omega \subset D(z, R)$.
- Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit **connexe**, si on peut joindre deux points quelconques de cet ouvert par une ligne polygonale entièrement située dans l'ouvert Ω.

Dans la suite un ouvert connexe sera appelé **Domaine**.

Exemple :

$\mathbb{C} \setminus D(z_0, R)$ est un connexe.

Scanned with CamScanner

1.2. Fonctions complexes .

Définition 1.1

Soit D une partie de $\mathbb{C}$.
Toute application $f : D \to \mathbb{C}$ est appelée fonction complexe d'une variable complexe.
On pourra aussi voir une telle application soit comme une application de D ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, soit comme un couple d'applications de D ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

où $P(x,y) = Re(f(x+iy))$ la partie réel de f et
$Q(x,y) = Im(f(x+iy))$ sa partie imaginaire.

Exemple 1.2

(1) $f(z) = 2z^2$
$P(x,y) = Re(f(x+iy)) = 2x^2 - 2y^2$
$Q(x,y) = Im(f(x+iy)) = 4xy.$

Scanned with CamScanner

(2) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \dfrac{1}{z}$

$$P(x,y) = Re(f(x+iy)) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$Q(x,y) = Im(f(x+iy)) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

(3) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \overline{z}$

(4) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = Re(z)$

(5) Fonction polynomiale complexe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$. où $a_n \in \mathbb{C}$.

On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients complexes.

(6) Fonction rationnelle complexe $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$.

Scanned with CamScanner

1.3. Fonction exponentielle complexe.

la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{C}$ par

$$e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

où $x, y \in \mathbb{R}$ et e^x l'exponentielle réelle usuelle.

- $| e^z | = e^x$
- $arg(e^z) \equiv y[2\pi]$

Attention : $| e^{it} | = 1$ mais $| e^{iz} | = | e^{ix}e^{-y} | = e^{-y}$.

Propriétés de e^z

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ $n \in \mathbf{Z}$

(1) $e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$

(2) $e^{nz} = (e^z)^n$

(3) $e^z = e^{z'} \iff z = z' + 2ik\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$.

Scanned with CamScanner

1.4. Fonctions hyperboliques complexes.

Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh(z) = \frac{e^z - e^z}{2}$$

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$

(1) $e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$

(2) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

(3) $\cosh(-z) = \cosh(z) \quad \sinh(-z) = -\sinh(z)$

(4) $\cosh(u+v) = \cosh(u).\cosh(u) + \sinh(u).\sinh(v)$

(5) $\sinh(u+v) = \sinh(u).\cosh(u) + \cosh(u).\sinh(v).$

Scanned with CamScanner

1.5. Fonctions trigonométriques complexes.

Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit les fonctions trigonométriques par

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i}$$

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$

(1) $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$

(2) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

(3) $\cos(-z) = \cos(z)$; $\sin(-z) = -\sin(z)$

(4) $\cos(u+v) = \cos(u).\cos(v) - \sin(u).\sin(v)$

(5) $\sin(u+v) = \sin(u).\cos(v) + \cos(u).\sin(v)$.

Remarque

Toutes les identités classiques que l'on connaissait sur les fonctions cosinus et sinus réelles restent valables pour le cas complexe.

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{C}$

(1) $\cos(z) = 0$. (2) $\cosh(z) = 0$.

(3) $\sinh(z) = 0$.

Scanned with CamScanner

1.6. Fonction logarithme complexe.

La fonction exponentielle n'est pas surjective puisqu'elle ne s'annule jamais,
$e^z = e^{z+2ik\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui implique que la fonction $z \mapsto e^z$ n'est pas injective aussi.
On ne peut donc espérer définir une fonction réciproque de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ tout entier.
Par contre sur la coupure $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on peut définir une fonction inverse de la fonction $z \mapsto e^z$ (l'exponentielle) de la manière suivante :
Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ et $w = u + iv \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z = e^w &\iff z = e^u e^{iv} \\ &\iff |\, z \,| = e^u \quad et \quad arg(z) \equiv v[2\pi] \\ &\iff u = \ln(|\, z \,|) \quad et \quad v = arg(z) + 2k\pi. \end{aligned}$$

donc $w = \ln(|\, z \,|) + i(arg(z) + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$, c'est une écriture qui n'est pas unique.

Scanned with CamScanner

Fonction logarithme complexe.

En adoptant la convention $arg(z) \in]-\pi, \pi]$, on obtient la détermination principale de la la fonction logarithme :

Définition 1.4

On définit **la fonction logarithme complexe** (la détermination principale), notée log, comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle $exp : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{C}^*$, par $\log(z) = \ln(\mid z \mid) + i.arg(z)$. pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ tel que $arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

C'est la détermination principale de la fonction logarithme (on pourrait définir une infinité d'autres déterminations en changeant la définition de la fonction argument).

$$\log(z) = w \iff z = e^w \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}^* .$$

Scanned with CamScanner

Remarque : La fonction logarithme principale définit une bijection entre la coupure $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et la bande $\mathbb{R} \times]-\pi, \pi[$.

Exemple :

(1) $\log(i) =$

(2) $\log(-i+1) =$

Scanned with CamScanner

1.7. Limite - continuité.

Définition

Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction et $z_0 \in \mathbb{C}$
D un voisinage de z_0 qui peut ne contenir z_0.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell \iff (\forall \varepsilon > 0)$$
$$(\exists \alpha > 0) \quad | z - z_0 | < \alpha \quad \Longrightarrow \quad | f(z) - \ell | < \varepsilon.$$

Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction et $z_0 \in D$
f est continue en $z_0 \iff \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Scanned with CamScanner

2. Fonctions holomorphes

Définition 2.1

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction et $z_0 \in U$ (U un ouvert de $\mathbb{C}$).

f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \iff \lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ existe.

On dit aussi que f est **dérivable au sens complexe** en z_0.
Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, la $\mathbb{C}$-différentiabilité et la dérivée $f'(z_0)$ peuvent être caractérisées par

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

où le reste $o(z - z_0)$ a la propriété $\lim_{z \to z_0} \dfrac{o(z - z_0)}{z - z_0} = 0$

Définition 2.2

f est holomorphe sur U si elle est $\mathbb{C}$-différentiable en chaque point $z_0 \in U$

Scanned with CamScanner

Fonctions holomorphes

Remarques :
On peut noter que les fonctions holomorphes sont toujours définies sur un **ouvert** de $\mathbb{C}$.
f est holomorphe en z_0 si f est $\mathbb{C}$-différentiable (dérivable) au voisinage de z_0
c'est à dire $\exists r > 0$ telle que f soit dérivable en tout point du disque $D(z_0, r)$.

Définition 2.3

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U.
On peut définir sur U la fonction dérivée f' de la manière suivante :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Exemple :
(1) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = z^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et on a $f'(z) = nz^{n-1}$.
(2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = \overline{z}$. Montrer que f n'est pas dérivable en aucun z_0

Scanned with CamScanner

Fonctions holomorphes

Proposition 2.4

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
f est holomorphe $\Longrightarrow$ f est continue.

Preuve

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \Longrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = 0$$

On pose $\varepsilon(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$

On a $f(z) = (z - z_0)f'(z_0) + f(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z)$ et $\lim\limits_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$.

Donc $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, ce qui montre que f est continue en z_0.

Scanned with CamScanner

2.2 Opérations sur les fonctions holomorphes

Proposition 2.5

Si f et g sont holomorphes sur U, $\alpha \in \mathbb{C}$,

- alors $\alpha f + g$, fg et f^n sont holomorphes sur U et on a $(\alpha f + g)' = \alpha f' + g'$ et $(fg)' = f'g + fg'$ et $(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$
- Si de plus g ne s'annule pas sur U, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi holomorphe et on a : $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Si f est holomorphe sur U, g est holomorphe sur V tel que $f(U) \subset V$, alors l'application composée $g \circ f$ est holomorphe sur U, et on a : $(g \circ f)'(z) = f'(z).g'(f(z))$.

Scanned with CamScanner

2.3 Holomorphie et différentiabilité

Proposition 2.6 (Application linéaire)

(1) On voit $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-application linéaire,
alors, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $\phi(z = x + iy) = ax + by$ pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
(2) On voit $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Si $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une $\mathbb{C}$-application linéaire,
Alors, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $\phi(z) = az$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Preuve= exercice

Exemple

Les projections canoniques de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$: $Re(z) = x$ et $Im(z)y$, sont des applications $\mathbb{R}$-linéaires.
Selon l'usage du calcul différentielle, on note ces applications :
$Re(z) = dx(z)$ et $Im(z) = dy(z)$.
Donc si $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une $\mathbb{R}$-application linéaire,
Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$: $\phi(x + iy) = a.dx(z) + b.dy(z)$

Scanned with CamScanner

Holomorphie et différentiabilité

Dérivée partielle

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe
Si on considère $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + iy \in U\}$, on peut identifier f à la fonction $\tilde{f} : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$.
Pour simplifier les notations, on note f au lieu $\tilde{f}$.

- La dérivée partielle suivant x en $z_0 = x_0 + iy_0$ est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h}$$

- La dérivée partielle suivant y en $z_0 = x_0 + iy_0$ est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + h)) - f(x_0 + iy_0)}{h}$$

Scanned with CamScanner

Holomorphie et différentiabilité

Définition 2.7

Une fonction $f : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est différentiable en $U_0 = x_0 + iy_0$ s'il existe une application $\mathbb{R}$- linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que :
$f(U_0 + h) - f(U_0) = L(h) + \mid h \mid \varepsilon(h)$ où $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

et dans ce cas la différentielle de f en U_0 est $L = df(U_0)$.
$L = df(U_0)$ est unique si elle existe, et on a la relation suivante avec les dérivées partielles.

Scanned with CamScanner

Holomorphie et différentiabilité

Théorème 2.8

Soit $f : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $U_0 = (x_0, y_0)$.
Si les dérivées partielles de f existent sur V et continues en U_0, alors la fonction f est différentiable en U_0 et sa différentielle en U_0 est donnée, pour tout $h = (h_1, h_2)$, par :

$$df(U_0)(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(U_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(U_0)h_2$$

f est $\mathbb{R}$-linéaire $\Longrightarrow$ f est différenties et et sa différentielle est elle même
c'est à dire $df = f$.

Scanned with CamScanner

2.4 Différentiabilité d'une fonction complexe

Remarque 2.9

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ complexe où U est un ouvert et $z_0 \in U$.
f est différentiable en z_0 s'il existe une application $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linéaire telle que :
pour tout $h \in \mathbb{C}$: $f(z_0 + h) - f(z_0) = L(h) + \mid h \mid \varepsilon(h)$
où $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

D'après ce qui précède :
$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire $\iff$ $\exists a, b \in \mathbb{C}$ tel que

$$L(h) = a.Re(h) + b.Im(h)$$

Donc f est différentiable en z_0 $\iff$ $\exists a, b \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $h \in \mathbb{C}$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = a.Re(h) + b.Im(h) + \mid h \mid \varepsilon(h)$$

• On dit que f est différentiable sur l'ouvert U si elle est différentiable en tout point de U.

Scanned with CamScanner

Différentiabilité d'une fonction complexe

Remarque 2.10

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ complexe où U est un ouvert et $z_0 \in U$.
Si les dérivées partielles existent et sont continues en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors la fonction f est différentiable ($\mathbb{R}$-différentiable), et sa différentielle en $z_0 = x_0 + iy_0$ est

$df(z_0)h = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)h_1$ pour tout $h = h_1 + ih_2$.

avec les notations précédentes $h_1 = dx(h)$ et $h_2 = dy(h)$,
on peut, donc, écrire

$$df(z_0)h = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).dx(h) + \frac{\partial f}{\partial y}.dy(h)$$

Scanned with CamScanner

2.5 Relation entre dérivabilité et Différentiabilité

Proposition 2.11

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ complexe où U est un ouvert et $z_0 \in U$.
Si f est dérivable au sens complexe (c.à.d f est $\mathbb{C}$-différentiable) en $z_0 = x_0 + iy_0$,
alors f est différentiable ($\mathbb{R}$-différentiable), et sa différentielle en $z_0 = x_0 + iy_0$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Preuve :

$$f \text{ est dérivable en } z_0 \implies \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

$$\implies \lim_{h\to 0} \mid \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-h.f'(z_0)}{h} \mid = 0$$

On pose $\varepsilon(h) = \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)-h.f'(z_0)}{\mid h \mid}$ Donc

$f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0).h + \mid h \mid \varepsilon(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

comme l'application $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $L(h) := f'(z_0).h$ est $\mathbb{C}$-linéaire,
alors f est différentiable ($\mathbb{R}$-différentiable), et sa différentielle en z_0 est $df(z_0) = L$ qui est $\mathbb{C}$-linéaire.

Scanned with CamScanner

Relation entre dérivabilité et Différentiabilité

Remarque 2.12

Si on note $dz : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application identité de $\mathbb{C}$ (c.à.d $dz(t) = t$), toute application $\mathbb{C}$- linéaire $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'écrit sous forme

$g = a.dz$ où $a \in \mathbb{C}$.

En particulier $df(z_0) = L$ est une application $\mathbb{C}$- linéaire, donc

$$df(z_0) = f'(z_0).dz$$

Ce qui justifier la notation $\dfrac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0)$.

Scanned with CamScanner

Relation entre dérivabilité et Différentiabilité

La réciproque de la proposition 2.11 n'est toujours, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.13

On considère $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \overline{z}$.
f est $\mathbb{R}$-linéaire $\Longrightarrow$ elle est différentiable en tout $z_0 \in \mathbb{C}$
et sa différentielle est elle même c.à.d $df(z_0) = f$ celle ci n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire,
donc, par contra-position, f n'est pas dérivable (au sens complexe) en aucun point de $\mathbb{C}$.

Scanned with CamScanner

Relation entre dérivabilité et Différentiabilité

Proposition 2.14

U un ouvert $\mathbb{C}$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$.
$f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable en z_0 .
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) f est dérivable (au sens complexe) en z_0 ($\mathbb{C}$-différentiable en) ;
(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$
(3) La différentielle $df(z_0,)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Scanned with CamScanner

Relation entre dérivabilité et Différentiabilité

Corollaire 2.15

U un ouvert $\mathbb{C}$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) f est holomorphe sur U
(2) f est différentiable sur U et sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

Exemple :
On considère la fonction $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que
$f(z = x + iy) = x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3iy + 4$.
Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Scanned with CamScanner

2.6 condition de Cauchy-Riemann

*Théorème 2.16 (**condition de Cauchy-Riemann**)*

U un ouvert $\mathbb{C}$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe.
On pose $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ pour $z = x + iy$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) f est dérivable ($\mathbb{C}$-différentiable) en z_0 ;
(2) f est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 , et que sa différentielle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en ce point ;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

et dans ce cas on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, x_0)$$

Preuve :

Scanned with CamScanner

condition de Cauchy-Riemann

Définition (les deux opérateurs différentiels)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Si $f = P + iQ$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]. \end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

condition de Cauchy-Riemann

Théorème 2.17

U un ouvert $\mathbb{C}$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) f est dérivable (au sens complexe) z_0 ($\mathbb{C}$-différentiable en) ;
(2) f est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 , et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

et dans ce cas sa dérivée en z_0 est donnée par $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Preuve : Exercice

Scanned with CamScanner

condition de Cauchy-Riemann

Exemple

(1) On reprend l'exemple précédent $f(z) = \overline{z}$.
$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 1 \implies f$ n'est pas holomorphe.
(2) $f(z) = z^n$

Preuve : Exercice

Scanned with CamScanner

Conclusion

$f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x+iy) = P(x,y) + Q(x,y)$.
f est holomorphe dans U , si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :
(1) La fonction f est dérivable (au sens complexe) en tout point de U.
(2) (*i*) $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont continues en tout point de U

(*ii*) les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent et sont continues en tout point (x,y) de U.

(*iii*) Les fonctions $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann en tout point de U.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

2.7. Fonctions holomorphes usuelles

Proposition 2.18

La fonction $f(z) = e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
et $f'(z) = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Preuve :

Scanned with CamScanner

Fonctions holomorphes usuelles

Proposition 2.20

Les fonctions suivantes sont holomorphes sur leurs domaines de définition :

(1) $e^{\alpha z}$ (2) $\sin(z)$ (3) $\cos(z)$ (4) $\tan(z)$

(5) $\sinh(z)$ (6) $\cosh(z)$ (7) $log(z)$

Et on a :

(1) $(e^{\alpha z})' = \alpha . e^{\alpha z}$ (2) $(\sin(z))' = \cos(z)$

(3) $(\cos(z))' = -\sin(z)$ (4) $(\tan(z))' = 1 + \tan^2(z)$

(5) $(\sinh(z))' = \cosh(z)$ (6) $(\cosh(z))' = \sinh(z)$

(7) $(log(z))' = \frac{1}{z}$

Preuve :

Scanned with CamScanner

3. Fonctions harmoniques

Définition 3.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$ une fonction.
f est de classe $C^1 \iff f$ est différentiable et les dérivées partielles sont continues.
f est de classe $C^2 \iff f$ est différentiable et les dérivées partielles sont de classe C^1.
L'opérateur $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ est appelée **le Laplacien**.

Scanned with CamScanner

f est harmonique sur $U \iff f$ est de classe C^2 sur U et que $\Delta f = 0$ sur U.
où $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Exemple : $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $P(x,y) = x^2 - y^2$.
P est de classe C^2 : c'est évident,
On a $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y$
donc $\Delta f(x,y) = 2 - 2 = 0$
d'où P est **harmonique** sur $\mathbb{R}^2$.

Scanned with CamScanner

Fonctions harmoniques

Proposition 3.2 (Rapport entre f. holomorphe et f. harmonique)

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe
$f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$.
(1) Si f est holomorphe sur U et si P et Q sont de classe C^2, alors P et Q sont harmoniques sur U.
(2) Réciproquement, Toute fonction harmonique à valeurs réelles est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Scanned with CamScanner

Exemple 3.3

Soit $P(x, y) = x^2 - y^2 - 3x + 4$
(1) Vérifier que P est harmonique sur $\mathbb{C}$.
(2) Déterminer toute les fonction holomorphe f pour lesquelles $Re(f(x + iy) = P(x, y)$.

Scanned with CamScanner

Exercices

(1) Trouver toute les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est donnée par $P(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$
(2) Montrer que $u(x, y) = e^{-x}(x \sin(y) - y \cos(y))$ est harmonique.

Scanned with CamScanner

Exercice

• 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos(z) = 0$

$$\cos(z) = 0 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 0$$

$$\iff e^{iz} = -e^{-iz}$$

$$\iff e^{iz} = e^{-iz + i\pi}$$

$$\iff e^{i(x+iy)} = e^{i(-x-iy+\pi)} \quad \text{avec } z = x+iy$$

$$\iff e^{-y} e^{ix} = e^{y} e^{i(-x+\pi)}$$

$$\iff \begin{cases} e^{-y} = e^{y} \\ x = -x + \pi + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} y = -y \\ 2x = \pi + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\cos(z) = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

Remarque

$\cos(z) \neq 0 \iff z \neq \pi/2 + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

et dans ce cas on peut définir la fonction tangente par: $\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$ $\quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ / k \in \mathbb{C}$.

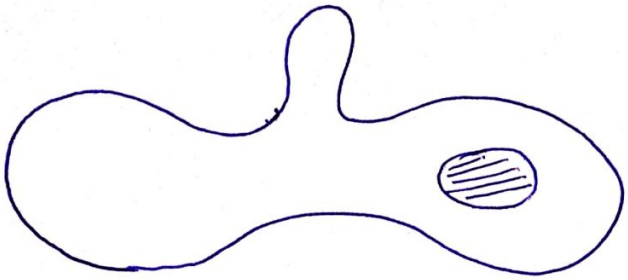
Rque:

$$\cos(z) = 0 \iff e^{iz} = e^{i(-z+\pi)}$$

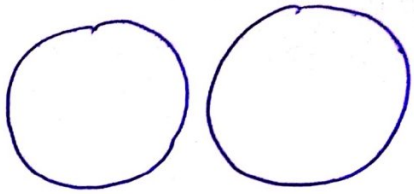
$$\iff iz = i(-z+\pi) + 2ik\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff z = -z + \pi + 2k\pi \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi \ / k \in \mathbb{Z}$$

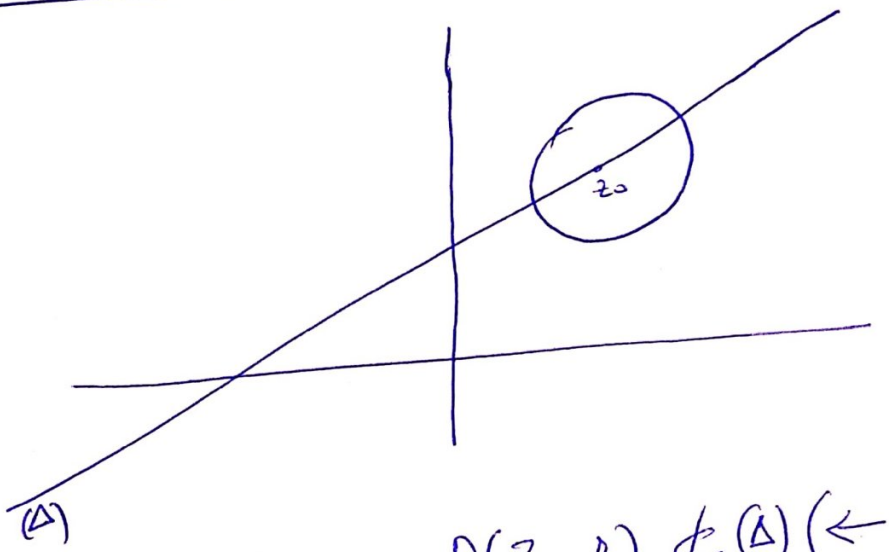
Scanned with CamScanner



Connexe



n'est pas connexe



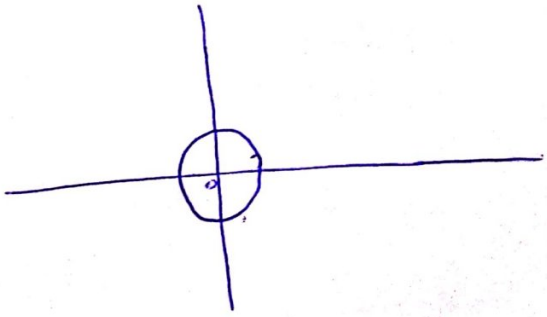
Soit $z_0 \in (\Delta)$, $\forall r > 0$ $D(z_0, r) \not\subset (\Delta)$ (← une droite)

$\Rightarrow$ (Δ) n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$.

---

① $\mathbb{C}^*$ est connexe

② $\mathbb{C} \setminus D(0,1)$ est connexe

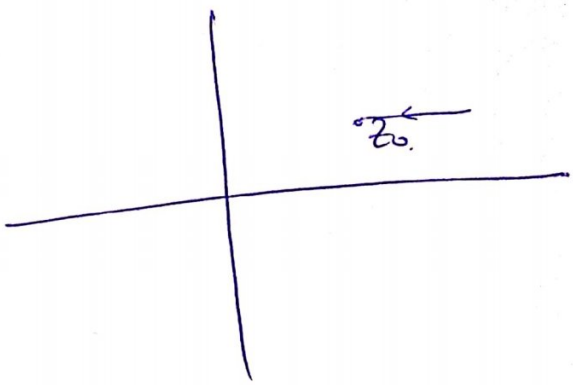


Scanned with CamScanner

Exemple

2) $f(z) = \bar{z}$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = ?$



- Pour $h = t$ $\quad t \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{\overline{z_0+t} - \bar{z}_0}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1$$

- Pour $h = it$ $\quad h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{\overline{z_0+it} - \bar{z}_0}{it} = -1$$

Donc f n'est dérivable en z_0 (n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en z_0)

$\Rightarrow f$ n'est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Méthode 2

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

on pose $z - z_0 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} (\cos\theta - i\sin\theta)^2$$ c'est une limite qui dépend de θ

donc $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'existe pas

$\Rightarrow f$ n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en z_0. (z_0 quelconque)

Scanned with CamScanner

2) Prop 2.6

$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ st $\mathbb{C}$-st linéaire

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} : \phi(z) = \phi(z \cdot 1) = \phi(1) \cdot z$

$= a \cdot z$

où $a = \phi(1)$

- Si on pose $a = u + iv$ et $z = x + iy$.

alors $\phi(z) = az = (u+iv)(x+iy)$

$= (ux - vy) + i(vx + uy)$

Si on considère $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto \phi(x,y) = (ux - vy, vx + uy)$

$\Rightarrow \phi(x,y) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Donc la matrice d'une appli'atin $\mathbb{C}$-linéaire est de la forme $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$

Exple

$dx = Re : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x+iy \mapsto x$

$dy = Im : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x+iy \mapsto y$

} sont des app $\mathbb{R}$-linéaire.

Si $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ st $\mathbb{R}$-linéaire

$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{C} : \phi(z) = ax + by$

$= a\, dx(z) + b\, dy(z)$

$\Rightarrow \phi = a \cdot dx + b \cdot dy$

(on peut dire que : $\{dx, dy\}$ st une base de l'espace des app $\mathbb{R}$-linéaire).

Scanned with CamScanner

Proposition 2.14 : preuve

1) $\Rightarrow$ 2)

f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0$.

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$.

$\Rightarrow f(z_0+h) = f(z_0) + h f'(z_0) + |h| \varepsilon(h)$ (*)

où $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

avec les notations : $z_0 = x_0 + iy_0 \sim (x_0, y_0)$

$h = h_1 + i h_2$.

$f'(z_0) = \alpha + i\beta$.

(*) $\Rightarrow f(z_0+h) = f(z_0) + (h_1 + ih_2)(\alpha + i\beta) + \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\, \varepsilon(h_1, h_2)$

$\Rightarrow f(z_0+h) - f(z_0) = (h_1\alpha - h_2\beta) + i(h_1\beta + h_2\alpha) + \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\, \varepsilon(h)$.

Rappelons des dérivées partielles de f en $z_0 = (x_0, y_0)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim \dfrac{f(x_0+h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim \dfrac{\quad}{\quad} \end{cases}$$

et $f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ quelque soit la manière dont $h \to 0$ ($h = h_1 + i0$)

Pour $h = (h_1, 0)$ on obtient

$f'(z_0) = \lim_{h_1 \to 0} \dfrac{f(x_0+h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

Scanned with CamScanner

Pour $h = (0, h_2)$ $\quad (h = ih_2)$

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

$$= \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h_2) - f(x_0, y_0)}{i h_2}$$

$$\boxed{f'(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0}$ (*)

Inversement (2) $\Rightarrow$ 1)

Supposons que f est $\mathbb{R}$-différentiable et satisfait (*)

Donc $f(z_0+h) - f(z_0) = df(z_0)\, h + |h|\, \varepsilon(h)$

$df(z_0) = L$: $\mathbb{R}$-linéaire

$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

$$\Rightarrow f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\, dx(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\, dy(h) + |h|\, \varepsilon(h)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\, h_2 + |h|\, \varepsilon(h)$$

(*) $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$

donc $f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(h_1 + i h_2) + h\, \varepsilon(h)$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\, h + |h|\, \varepsilon(h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

$\Rightarrow f$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0

et $\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)}$

Scanned with CamScanner

1) $\Rightarrow$ 3) voir Prop. 2.11

3) $\Leftarrow$ 1) Supposons que :

f est $\mathbb{R}$-différentiable et sa différentielle est

$df(z_0) = L$ est $\mathbb{C}$-linéaire

$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{C}$ tq $df(z_0)(h) = ah$

f est $\mathbb{R}$-diff en z_0 $\Leftrightarrow$ $f(z_0+h) - f(z_0) = df(z_0)(h) + h\varepsilon(h)$

$\Rightarrow f(z_0+h) - f(z_0) = ah + h\varepsilon(h)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = a$

donc f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0.

//

Scanned with CamScanner

Exple

$f(z=x+iy) = x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3iy + 4$

- f est $\mathbb{R}$ différentiable en tout (x_0, y_0) (C'est évident)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = 2x + 2iy - 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = 2ix - 2y - 3i = i\left(2x \cdots\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(z) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z)$$

$\Rightarrow f$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z.

$\Rightarrow f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Scanned with CamScanner

Intégrale des fonctions complexes

23 avril 2020

Scanned with CamScanner

1 Intégrale des Fonctions Complexes

Scanned with CamScanner

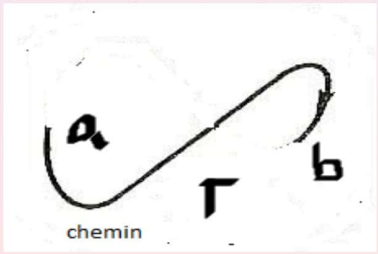
1.1. Chemin et Circuit.

Définition 1.1

(1) Un **chemin** (Γ) est une courbe paramétré par une application

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma(t) = \phi(t) + i\psi(t)$$

où ϕ et ψ sont deux fonctions continues et de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$
et $\gamma([a, b]) = (\Gamma)$ (appelée support de γ notée $Supp(\gamma)$)
$\gamma(a)$: l'origine de Γ et $\gamma(b)$ son extrémité.
(2) Si le chemin se referme c'est-à-dire $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que Γ est **un chemin fermé** ou un **Lacet**.



Scanned with CamScanner

Exemple 1.2

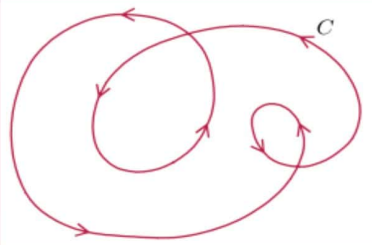
(1) Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on définit un chemin (Γ) d'origine z_1 et d'extrémité z_2 par :
$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad \gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$
$\gamma(0) = z_1$: l'origine et $\gamma(1) = z_2$ l'extrémité.
Un chemin d'origine z_2 et d'extrémité z_1 est paramétré par :
$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad \gamma(t) = tz_1 + (1-t)z_2$
Remarque : dans les deux cas $\gamma([0,1]) = [z_1, z_2]$ un segment.
(2)Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon r. Il est paramétré par
$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \qquad \gamma(t) = r.e^{it}$.
$\gamma([0,2\pi]) = (\Gamma) = C(O,r)$ le cercle.

Scanned with CamScanner

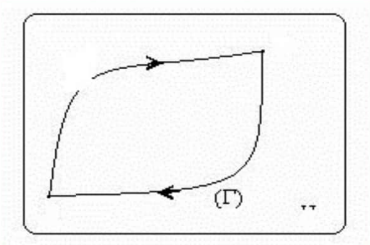
1.2. Chemin simple (circuit simple).

Définition 1.3

Soit (Γ) un chemin fermé paramétré par $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, c.à.d $\gamma(a) = \gamma(b)$.
On dit que (Γ) est un chemin fermé simple (ou circuit simple) si $\gamma/_{[a,b[}$, la restriction de γ sur $[a, b[$, est injective
c'est à dire : excepte au extrémités, γ ne possède pas de point double ou multiple (il ne se coupe pas).



← multiple ; simple →

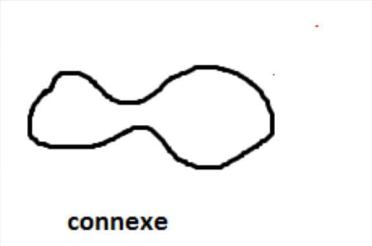


Scanned with CamScanner

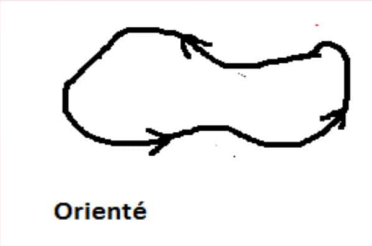
1.3. Connexe- connexe par arc- orientation.

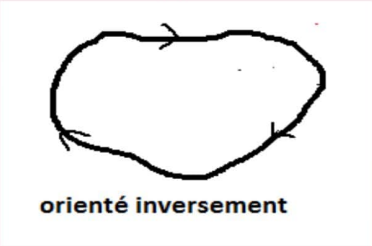
Définition 1.4

(1) Un ouvert U est dit connexe s'il ne peut s'écrire comme union de deux ouverts non vides disjoints.



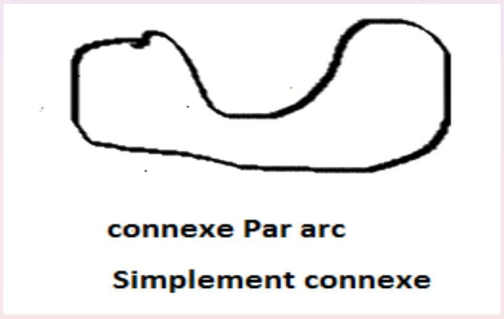
(2) Soit γ un circuit simple, il partage le plan en deux ouverts connexes ayant comme frontière commune le circuit (Γ).
l'un d'eux est borné est appelé : intérieur de (Γ)
l'autre est nécessairement non borné, appelé extérieur.
on dit que (Γ) est orienté dans le sens direct si son intérieur se trouve à gauche quand il parcourt son support.





Scanned with CamScanner

(3) Une partie U de $\mathbb{C}$ est dite connexe par arc si deux points quelconque de U peuvent toujours être relié pas un chemin entièrement inclue dans U.
(4) Un ouvert connexe U est appelé **domaine**.
U est dit **simplement connexe** si tout lacet (chemin fermé) γ peut être contracté de manière continue en un point de U sans sortir de U (c'est à dire sans trou).

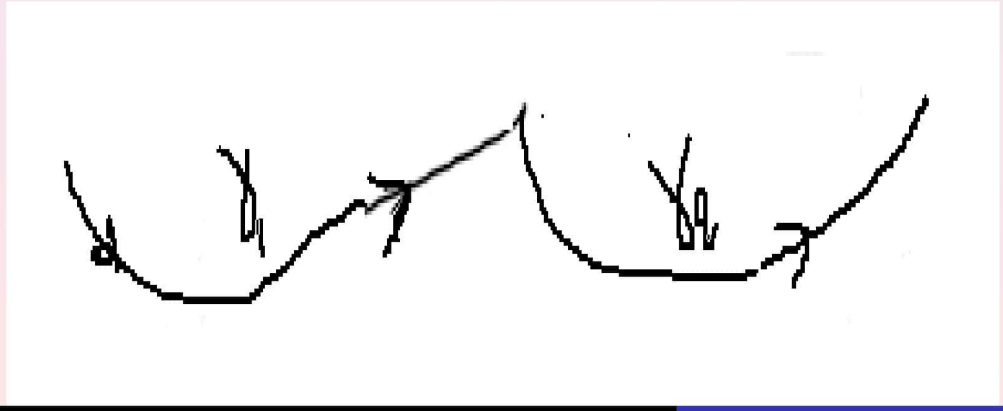


Scanned with CamScanner

1.4 Chemin opposé- Juxtaposition de deux chemins.

(1) Étant donné un chemin $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$, on définit son **chemin opposé** $\gamma^{op} : [a; b] \to \mathbb{C}$ par $\gamma^{op}(t) = \gamma(a + b - t)$.
L'origine de γ^{op} est l'extrémité de γ, et son extrémité est l'origine de γ.
Les deux chemins partagent le même support.
(2) Deux chemins $\gamma_1 : [a; b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c; d] \to \mathbb{C}$ sont dits **consécutifs** si $b = c$ et $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.
Il est alors possible de juxtaposer deux chemins consécutifs pour en former un troisième $\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2 : [a; b] \to \mathbb{C}$ donné par

$$\begin{cases} \gamma(t) = \gamma_1(t) & si\ t \in [a, b] \\ \gamma(t) = \gamma_2(2) & si\ t \in [b, d] = [c, d] \end{cases}$$



Scanned with CamScanner

2. Primitive

Définition 2.1

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.
On appelle primitive de f sur U toute fonction F holomorphe sur U telle que $F' = f$

Proposition 2.2

Soit U un ouvert connexe par arc et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.
Si $F, G : U \to \mathbb{C}$ sont deux primitives de f sur U
alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $F = G + c$.

Exemple

Scanned with CamScanner

3. Intégration Curviligne le long d'un chemin

Dorénavant On note γ le chemin paramétré par γ au lieu Γ pour simplifier les notations.

Définition 3.1

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un ouvert U.
Soit γ un chemin paramétré par $\gamma : [a; b] \to U$.
L'intégrale curviligne de f le long du chemin γ est donnée par

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$$

Remarque : le second membre existe au sens de Riemann :
En effet : La fonction $t \mapsto f(\gamma(t)).\gamma'(t)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, donc elle est intégrable

Exemple :
(1) Soit γ un chemin paramétré par $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = t$.
Donc $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$.
Ainsi, l'intégrale curviligne le long d'un chemin **généralise** l'intégrale des fonctions continues d'une variable réelle.

Scanned with CamScanner

(2) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon R,
On note (C^+) le circuit orienté au sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre),
Il paramétré par $\gamma(t) = Re^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$.

- Pour la fonction $f(z) = z^2$ on a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} (Re^{it})^2).\gamma'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} iR^2 e^{i2t} Re^{it} dt \\ &= \frac{iR^3}{3i}[e^{i3t}]_0^{2\pi}. \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Pour $f(z) = \dfrac{1}{z}$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}} dt = \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi.$$

Scanned with CamScanner

Proposition 3.2 (Propriétés de l'intégrale curviligne)

Soient $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues. $\gamma : [a; b] \to U$ un chemin .

(1) $\int_\gamma f(z) + g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$ (additivité).

(2) $\int_\gamma \alpha f(z)dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz$ (homogénéité).

(3) $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^{op}} f(z)dz$. où γ^{op} est le chemin opposé de γ.

(4) Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins consécutifs tel que $\gamma_1 \star \gamma_2([a; b]) \subset U$,

$$\int_{\gamma_1 \star \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Scanned with CamScanner

Changement de paramètre

Soit $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ un chemin et $\phi : [c; d] \to [a, b]$ un C^1-difféomorphisme (C.à.d ϕ est bijective et ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^1), tel que $\phi(c) = a$ et $\phi(d) = b$.
On peut donc définir un nouveau chemin $\gamma \circ \phi : [a; b] \to \mathbb{C}$.

Rappel (la formule du changement de variable)

Si g est une fonction intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann, la formule du changement de variable donne :

$$\int_a^b g(x)dx = \int_c^d g(\phi(t)).\phi'(t)dt.$$

En appliquant ça à $g(t) = f(\gamma(t)).\gamma'(t)$, on obtient :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_c^d f(\gamma\circ\phi(t))\gamma'(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz.$$

Ce qui montre que l'intégrale curviligne est invariante par le changement de paramètre.

Scanned with CamScanner

Longueur d'un chemin

Soit $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ un chemin.
On appelle longueur de (γ) le nombre $\ell(\gamma) = \int_a^b \mid \gamma'(t) \mid dt$
Si on pose $\gamma(t) = \phi(t) + i\psi(t)$,

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}.dt$$

et on la proposition suivante

Proposition 3.3

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue, $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ un chemin.
Alors

$$\mid \int_\gamma f(z)dz \mid \leqslant \sup_{z \in U} \mid f(z) \mid \ell(\gamma).$$

Scanned with CamScanner

Proposition 3.4 (Intégration curviligne et primitive)

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur U, $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ un chemin. Si F est une primitive de f sur U et $\gamma(a) = z_1$ et $\gamma(b) = z_2$, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Preuve :
On a $(F \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t).f(\gamma(t))$
donc

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = F(z_2) - F(z_1).$$

Scanned with CamScanner

Corollaire 3.5

Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue admettant une primitive sur U. Alors pour tout chemin fermé $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ on a

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Exercice :

Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Scanned with CamScanner

Exemple : On considère la fonction $f(z) = (z - z_0)^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.
(γ) : cercle de centre z_0 et de rayon R parcourut une seule fois dans le sens direct (c'est chemin fermé).
On distingue deux cas :
1er cas : $n \neq -1$, dans ce cas f est continue admettant une fonction primitive
donc $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
2em cas : $n = -1 =$ on sait que $\gamma(t) = z_0 e^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}} dt = 2i\pi.$$

Scanned with CamScanner

4. Théorie de Cauchy.

Définition 4.1 (ouvert simplement connexe)

Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit **simplement connexe** si, et seulement si Ω est connexe dans lequel toute courbe fermé peut être contractée de façon continue à un point quelconque deΩ sans sortir de Ω
(Un ouvert simplement connexe est un ouvert connexe sans trou).

Exemple :
Tout ouvert **convexe** de $\mathbb{C}$ est simplement connexe.
la couronne de $\mathbb{C}$ est **connexe mais** n'est simplement connexe.

Théorème 4.2 (Th fondamental de Cauchy)

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω,
alors pour tout chemin fermé simple (γ) inclue dans Ω on a

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Scanned with CamScanner

Exemple :
$\int_\gamma \frac{z}{z^2-3} dz = 0$ où (γ) est cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct.

Remarque Si on remplace Ω un ouvert simplement connexe par Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on aura la version suivante :

Théorème 4.3 (autre version)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω. Si (γ) est un chemin fermé simple inclue dans Ω ainsi que son intérieur, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Exemple : Revenons à l'exemple $f(z) = \frac{1}{z}$ c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$
On considère (γ) le cercle de centre O et rayon R
on a trouvé $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \neq 0$, car l'intérieur (Γ) n'est pas inclue dans $\mathbb{C}^*$.

Scanned with CamScanner

Corollaire 4.4

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω. Alors pour tous points A et B de Ω, l'intégrale $\int_{A\to B} f(z)dz$ ne dépend pas du chemin joignant A et B.

Corollaire 4.5

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$.
Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ et $z_0 \in \Omega$.
Si (γ_1) et (γ_2) sont deux chemins fermés simples situés dans Ω ainsi que leurs intérieurs contenant z_0, alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Scanned with CamScanner

Formules de Cauchy.

Corollaire 4.6

Soient D_1 et D_1 deux disques dans $\mathbb{C}$ avec $\overline{D_1} \subset D_2$.
Alors, pour chaque fonction f holomorphe sur un voisinage de $\overline{D_2} \setminus D_1$,

$$\int_{\partial D_1} f(z)dz = \int_{\partial D_2} f(z)dz.$$

où (∂D désigne le bord du disque D (c'est un circuit qui parcourt le cercle une seule fois dans le sens direct).

Scanned with CamScanner

Formules de Cauchy.

Théorème 4.7 (Formule de Chauchy pour un disque)

Soit Ω un **ouvert non vide** de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ tel que $\overline{D}(z_0, R) \subset U$; $(R > 0)$.
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω,
Pour tout $z \in D(z_0, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(u)}{u - z} du.$$

où (C^+) est un circuit qui parcourt le cercle $\mid z - z_0 \mid = R$ une seule fois dans le sens direct.

Preuve :

Scanned with CamScanner

Formule de Chauchy.

Théorème 4.8 (Formule intégrale de Chauchy)

Soit Ω un **domaine simplement connexe** de $\mathbb{C}$ (C'est à dire sans trou).
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω,
Pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout chemin fermé simple (γ) dans Ω entourant z_0

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Traduction : Il suffit de connaître les valeurs de f sur la courbe fermé (γ) pour avoir les valeurs de f en tout point intérieur de (γ).

Scanned with CamScanner

Exemple

(1) Évaluer l'intégrale $\int_\gamma \frac{e^z}{z-1} dz$
où (γ) est le cercle $\{z/ \mid z-2 \mid = 2\}$.
(2) Évaluer l'intégrale $\int_\gamma \frac{z+1}{z(z-1)(z+2)} dz$ dans les cas suivants :

(a) (γ) est le cercle $\{z/ \mid z \mid = \frac{1}{2}\}$.

(b) ou le cercle $\{z/ \mid z \mid = \frac{3}{2}\}$.

(c) (γ) est le rectangle de sommets $-4+i$, $-4-i$, $2+i$ et $2-i$.

Scanned with CamScanner

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

Scanned with CamScanner

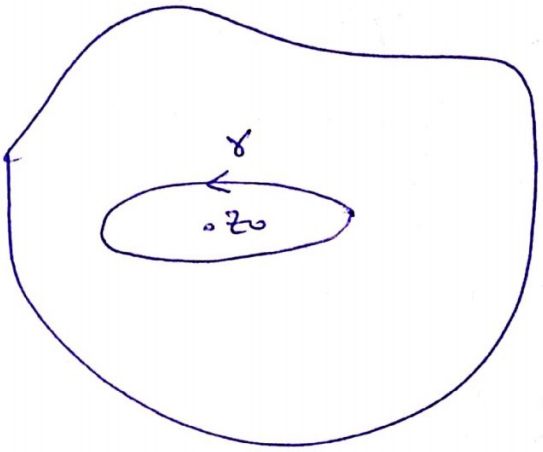
Th 4.8 Formule intégrale de Cauchy

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe

Ω domaine simplement connexe

$\forall z_0 \in \Omega$.

$\forall \gamma$ contour chemin fermé simple entourant z_0

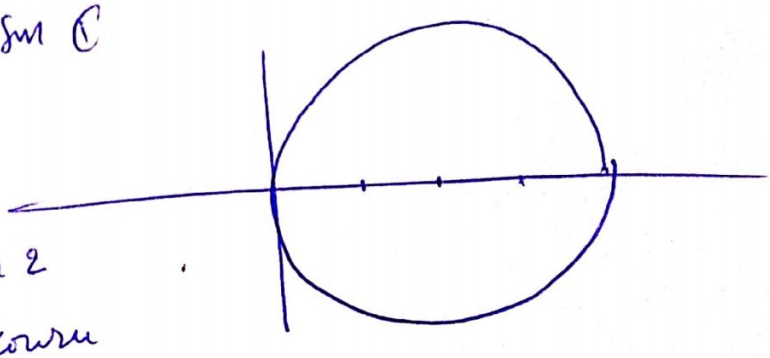


$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

Exemple

1) $f(z) = \dfrac{e^z}{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

2) $f : z \mapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$



on considère γ : le cercle de centre 2 et de rayon 2 parcouru dans le sens trigonométrique

γ entour $z_0 = 1$

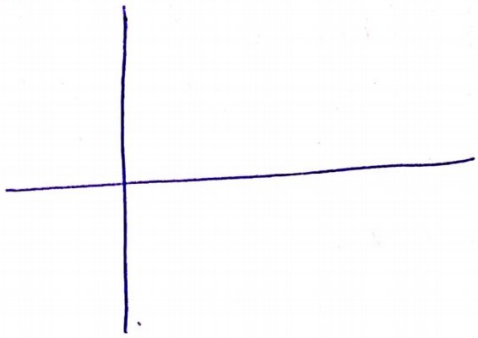
D'après th : $f(1) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-1} \, dz$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z}{z-1} \, dz = 2i\pi f(1) = 2i\pi e$$

Scanned with CamScanner

Exemple

1) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} : \quad \gamma(t) = t$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\left(\text{Si } \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t). \right)$$

Changement de paramètre

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$: $\quad \phi : [c,d] \to [a,b]$

$\gamma \circ \phi : [c,d] \xrightarrow{\phi} [a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}$

$\gamma \circ \phi$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))\,\gamma'(t)}_{g(t)}\,dt = \int_c^d g(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$
$$= \int_c^d \underbrace{f(\gamma(\phi(t)))\,\gamma'(\phi(t))}_{g(\phi(t))}\,\phi'(t)\,dt$$
$$= \int_c^d f(\gamma\circ\phi(t))\,(\gamma\circ\phi)'(t)\,dt = \int_{\gamma\circ\phi} f(z)\,dz$$

l'intégrale curviligne est invariant par le changement de γ par $\gamma \circ \phi$.

Scanned with CamScanner

Longueur d'un chemin

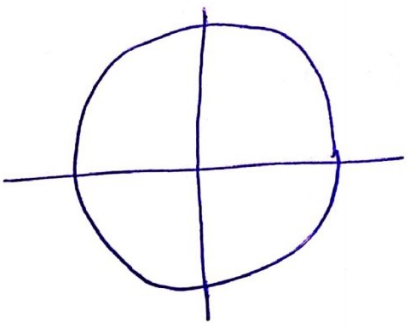
$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \quad \text{si } \gamma = \phi + i\psi.$$

exemple

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = Re^{it}$$



γ : le cercle de centre o et de rayon R parcourt dans le sens direct (une seule fois)

$$\gamma'(t) = Rie^{it}$$

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} |Rie^{it}|\,dt = \int_0^{2\pi} R\,dt$$

$$= 2\pi R$$

Proposition 3,3

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue

$$\Rightarrow \left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \sup_{z \in U} |f(z)| \; l(\gamma).$$

En effet $\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \right|$

$$\leq \sup_{t \in \gamma} |f(\gamma(t))| \int_\gamma |\gamma'(t)|\,dt$$

$$\leq \sup_{z \in U} |f(z)| \; l(\gamma)$$

Scanned with CamScanner

Corollaire 3.5

f admet une primitive sur U.

Soit F cette primitive

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ chemin fermé $\Rightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

Exercice

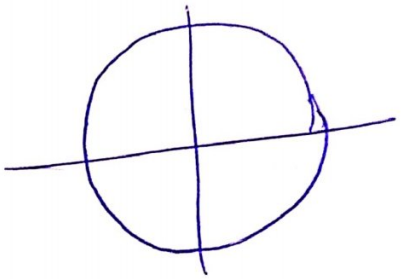
Mque La fct $f(z) = \frac{1}{z}$ n'admet de primitive sur $\mathbb{C}^*$

Par L'absurde, supposons que f admet une primitive F sur $\mathbb{C}^*$

et considérons le circuit paramétré par :

$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = Re^{it}$



γ est un chemin fermé

d'après Corollaire 3,5 $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

ce qui contredit le fait que $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Rie^{it}\,dt$$

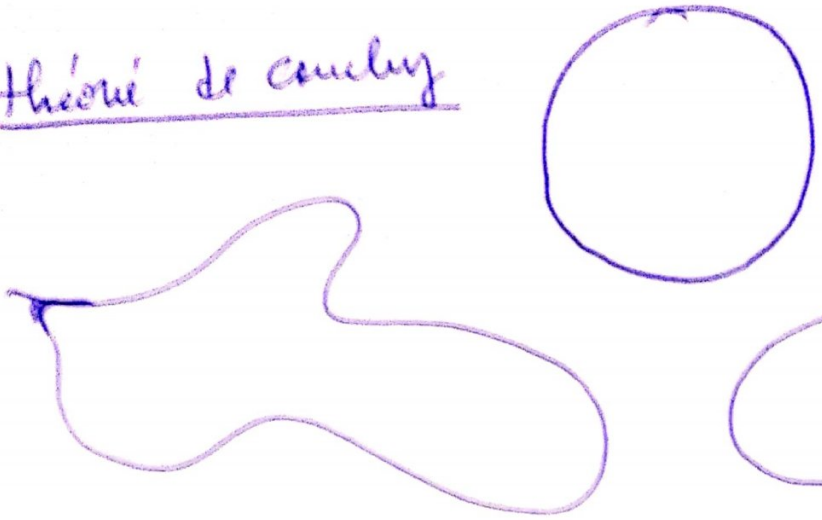
$$= 2i\pi.$$

Conclusion La fonction $z \longrightarrow \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$

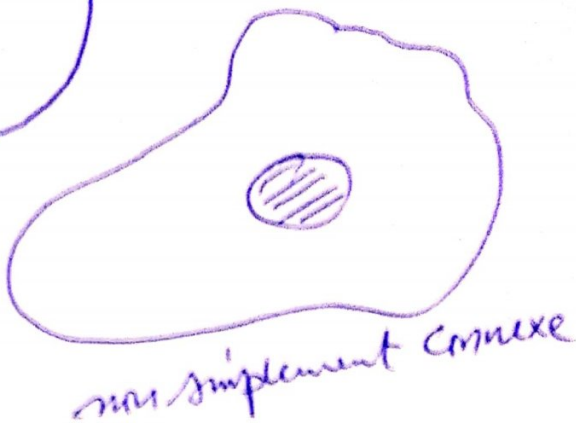
Rque on ne peut pas prolonger La détermination principale du logarithme à $\mathbb{C}^*$ tout entier.

Scanned with CamScanner

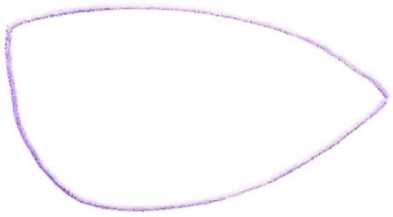
Théorie de Cauchy



Simplement connexe



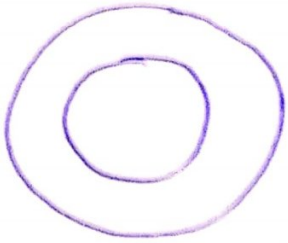
non simplement connexe



Convexe

↓

Simplement connexe



Couronne

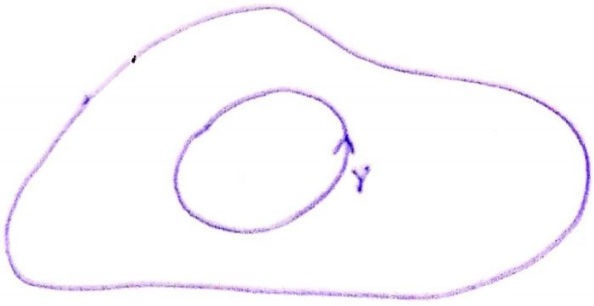
↓

non simplement connexe

Théorème

$\begin{cases} \cdot f \text{ holomorphe sur } \Omega \\ \cdot \Omega \text{ simplement connexe} \end{cases}$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0.$



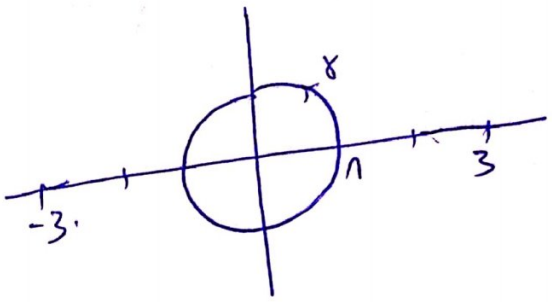
$\forall \gamma$ chemin fermé simple

$/ \ (\gamma) \subset \Omega$

Scanned with CamScanner

Exemple

$f(z) = \dfrac{z}{z^2-3}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-3,3\}$

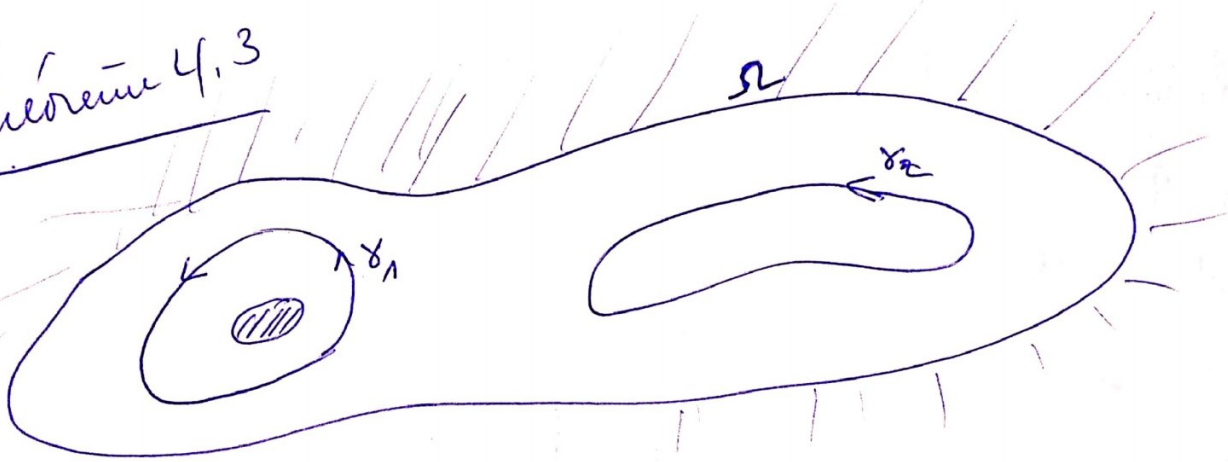


$(\gamma) \subset \mathbb{C}\setminus\{-3,3\}$

γ est chemin fermé simple

$\Rightarrow \displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$

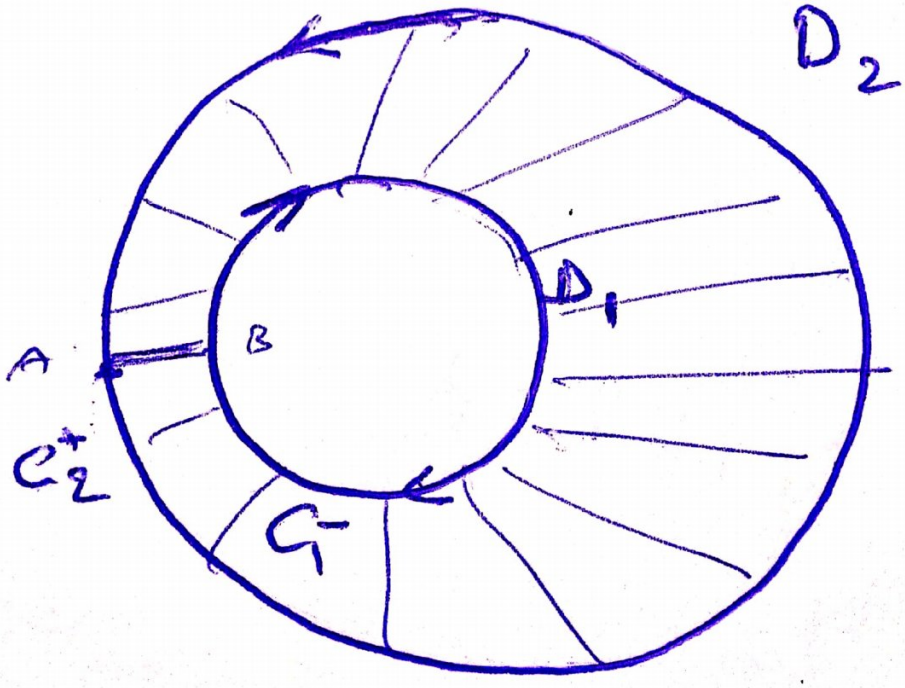
Théorème 4.3



Ω un ouvert
(non simplement connexe)

- Si f est holomorphe sur $\Omega \Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$
- Mais on ne peut pas appliquer le th de Cauchy pour $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ car l'intérieur de γ_1 n'est pas inclus dans Ω.

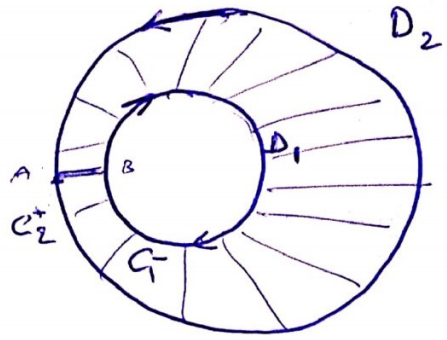
Scanned with CamScanner



... cercle ...

Scanned with CamScanner

Corollaire 4.6



le bord orienté de $K = \bar{D}_2 \setminus D_1$ consiste des deux cercle ∂D_2 (parcouru dans le sens positif) et ∂D_1 , parcouru dans le sens négatif

on a d'après th de cauchy $\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0$

$$\Rightarrow \int_{\partial D_2} f(z)\,dz - \int_{\partial D_1} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial D_1} f(z)\,dz = \int_{\partial D_2} f(z)\,dz$$

---

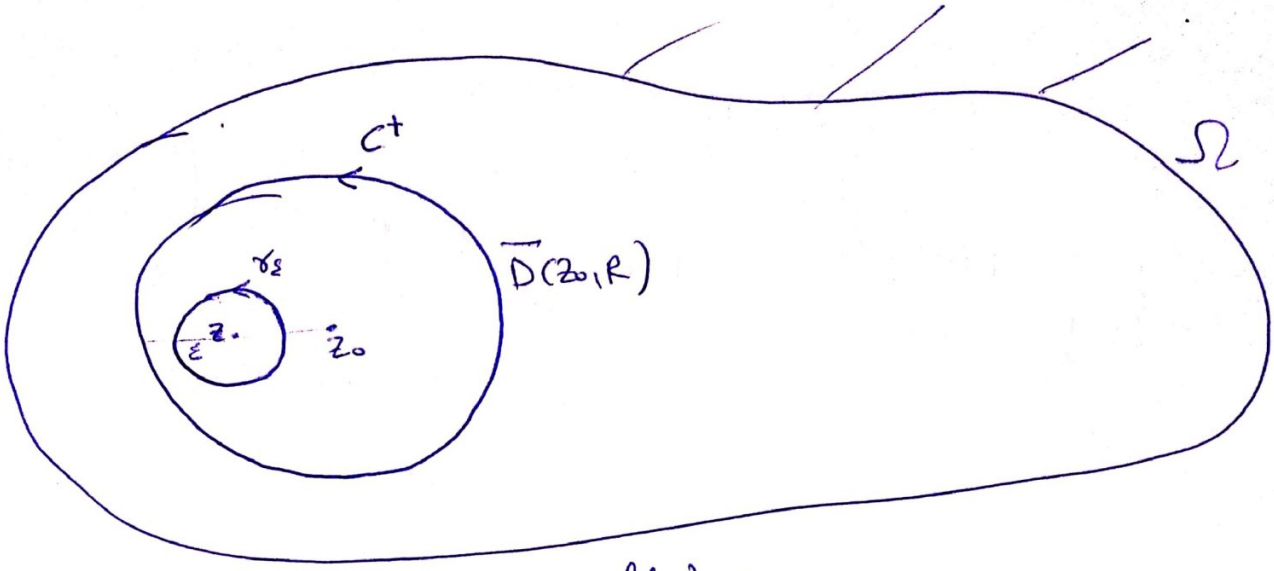
on considère $\Gamma = C_2^+ * AB * C_1^- * BA$: c'est une circuit fermé simple inclue dans un ouvert ouvert où f est holomorphe

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z) = 0 \Rightarrow \int_{C_2^+} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{C_1^-} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

Scanned with CamScanner

Théorème 4.7. Formule de Cauchy dans un disque



$\forall z \in D(z_0,R) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(u)}{u-z}\, du.$

Soit $z \in D(z_0,R)$

Soit $0 < \varepsilon < R - |z-z_0|$.

et on considère γ_ε : circuit simple parcourant le cercle de centre z et de rayon ε.

$$\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{2i\pi t} \qquad t \in [0,1].$$

. La fonction $u \longmapsto \frac{f(u)}{u-z}$ est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z\}$

et $\overline{D}_{(z_0,R)} \setminus D_{(z,\varepsilon)} \subset \Omega \setminus \{z\}$

D'après Corollaire 4.7, $\int_{\partial D_{z_0}} \frac{f(u)}{u-z}\, du = \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(u)}{u-z}\, du$

c'est à dire $\int_{C^+} \frac{f(u)}{u-z} = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u-z}\, du.$

D'une part : $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u-z}\, du = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)-f(z)}{u-z}\, du + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{u-z}\, du$

Scanned with CamScanner

$$\cdot \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{u-z}\,dz = f(z)\int_0^1 \frac{2i\pi\varepsilon e^{2i\pi t}}{z+\varepsilon e^{2i\pi t}-z}\,dt \qquad \left(\gamma_\varepsilon(t) = z+\varepsilon e^{2i\pi t},\ t\in[0,1]\right)$$

$$= f(z)\int_0^1 2i\pi\,dt = 2i\pi f(z).$$

$$\cdot \left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)-f(z)}{u-z}\,du \right| \le \sup_{u\in\gamma_\varepsilon} |f(u)-f(z)| \cdot \left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{u-z}\,du \right|$$

$$\le 2\pi \cdot \sup_{u\in\gamma_\varepsilon} |f(u)-f(z)|$$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow |f(u)-f(z)| \longrightarrow 0$

donc $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)-f(z)}{u-z}\,du \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(u)}{u-z}\,du \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2i\pi f(z)$

Conclusion $\displaystyle\int_{C^+} \frac{f(u)}{u-z}\,du = 2i\pi f(z)$

c.à.d $\boxed{f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+} \frac{f(u)}{u-z}\,du}$

Scanned with CamScanner

Fonctions Analytiques

7 mai 2020

Scanned with CamScanner

1 Séries entières

2 Fonctions Analytiques

3 Principe des zéros isolés

Scanned with CamScanner

1.1. Séries entières.

Définition 1.1

On appelle série entière une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

On peut parler aussi d'une série entière de la forme :
$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$, où $z_0 \in \mathbb{C}$ est fixé.

Proposition 1.2

Soit $\rho = sup\{r \in [0,+\infty[/ \sum_{n\geqslant 0} \mid a_n \mid r^n converge\}$.
(1) Pour tout $r < \rho$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur le disque $\mid z \mid \leqslant r$.
(2) La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge pour tout $\mid z \mid > \rho$.

Scanned with CamScanner

Remarque 1.3

(1) D'abord, puisque la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge pour $r = 0$, alors ρ existe, mais il peut être nul, fini ou infini.
On l'appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
le disque fermé $\{z \in \mathbb{C}/ \mid z \mid \leqslant \rho\}$ est appelé disque de convergence.
(2) La somme de la série entière est une fonction continue sur l'intérieur du disque de convergence.
(3) Si $R = \infty$, la série entière converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
(4) Sur le cercle de convergence $\mid z \mid = \rho$ on peut rien conclure sur la convergence de la série.

La preuve de la Proposition 1.2 est basée sur le lemme suivant

Scanned with CamScanner

Lemme 1.4

Soient r et r_0 deux réels tels que $0 < r < r_0$.
S'il existe un nombre réel $M > 0$ tel qu'on ait $\mid a_n \mid r_0^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement pour tout $\mid z \mid \leqslant r$.

Preuve : Voir...
Preuve de la Proposition

Scanned with CamScanner

1.2. Détermination du rayon de convergence

Propriété 1.5 (Règle D'Allembert)

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$ et R son rayon de convergence.

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \ell$

- $0 < \ell < \infty \implies R = \dfrac{1}{\ell}$.
- $\ell = 0 \implies R = +\infty$.
- $\ell = \infty \implies R = 0$.

Scanned with CamScanner

Proposition 1.6 (Règle de Hadamard)

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$ et R son rayon de convergence.
Posons $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{|\ a_n\ |} = \ell$

- $0 < \ell < \infty \implies R = \dfrac{1}{\ell}$.
- $\ell = 0 \implies R = +\infty$.
- $\ell = \infty \implies R = 0$.

Exemple 1.7

(1) On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$. Dans ce cas $a_n = \dfrac{1}{n!}$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} |\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ | = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n)!}{(n+1)!} = 0$
donc le rayon de convergence est $R = \infty$.

c.à .d la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$

Scanned with CamScanner

(2) On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} n!.z^n$. Dans ce cas $a_n = n!$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \mid \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \mid = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n)!} == \infty$

donc le rayon de convergence est $R = 0$.

c.à .d la série ne converge que pour $z = 0$.

(3) **Série géométrique** : $\sum_{n\geqslant 0} z^n$. Dans ce cas $a_n = 1$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \mid \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \mid = 1$, donc le rayon de convergence est $R = 1$.

Pour tout $\mid z \mid < 1$ $z^{n+1} - 1 = (z-1)(z^n + ... + 1)$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{z-1}$ (puisque $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$).

Remarque : Sur le bord du disque de convergence c.à .d si $\mid z \mid = 1$ cette série ne converge en aucun point.

Scanned with CamScanner

(4) On considère la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n^2}$. Dans ce cas $a_n=\frac{1}{n^2}$

On a $\lim\limits_{n\to\infty}\mid\frac{a_{n+1}}{a_n}\mid=1$

donc le rayon de convergence est $R=1$.

Sur le bord du disque de convergence c.à .d si $\mid z\mid=1$ la série $\sum_{n\geqslant 0}\mid\frac{z^n}{n^2}\mid=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^2}$ converge.

Donc pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $\mid z\mid=1$ la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n^2}$ est absolument convergente.

(5) On considère la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n}$. Dans ce cas $a_n=\frac{1}{n}$

On a $\lim\limits_{n\to\infty}\mid\frac{a_{n+1}}{a_n}\mid=1$

donc le rayon de convergence est $R=1$.

Sur le bord du disque de convergence c.à .d si $\mid z\mid=1$, $z=e^{i\alpha}$; on distingue deux cas :

- $\alpha\equiv 0[2\pi]\implies$ la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n}$ diverge.
- $\alpha\neq 0[2\pi]\implies$ la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{in\alpha}}{n}$ converge d'après la règle d'Abel.

Scanned with CamScanner

1.3. Opérations sur les séries entières

Proposition 1.8

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. On considère

- la série entière **somme** $S(z) = \sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)z^n$, et
- la série entière **produit** $P(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, où $c_n = \sum_{k=o}^{n} a_k b_{n-k}$.

les série entières $S(z)$ et $P(z)$ ont un rayon de convergence au moins égale $R = inf(R_a, R_b)$, et pour tout $\mid z \mid < R$ on a :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n).(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)$$

Remarque :

Si $R_a \neq R_b$ alors $R_S = \min(R_a, R_b)$.

Scanned with CamScanner

Propriétés fonctionnelles d'une série entière

Proposition 1.9 (la continuité)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors sur le disque ouvert $D(0,R)$ la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue.

Proposition 1.10 (la dérivabilité)

(•) Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.
(•) Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors sur le disque ouvert $D(0,R)$ la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est indéfiniment dérivable et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)^{(p)} = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)...(n-p+1) a_n z^{n-p}$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-p}.$$

Scanned with CamScanner

Corollaire 1.11

Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Remarque :
Pour trouver le rayon de convergence d'une série entière on peut chercher celui de la série **dérivée** ou celui de la série **primitive**, si cette méthode apporte une simplification.

Corollaire 1.12

Toute série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $D = \{z \in \mathbb{C} / \mid z \mid < R\}$ où R son rayon de convergence.

Scanned with CamScanner

Remarque 1.13 : Coefficients d'une série entière

(1) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ une série de rayon de convergence R.
D'après ce qui précède, la fonction $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est de classe C^∞ sur $D=\{z\in\mathbb{C}/\mid z-z_0\mid<R\}$.
et on a $f^{(p)}(z)=\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)...(n-p+1)a_n(z-z_0)^{n-p}$.
En particulier, pour $z=z_0$: $f^{(p)}(z_0)=p!a_p$
ce qui prouve que

$$a_p=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$$

(2) Pour la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
la fonction $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $D=\{z\in\mathbb{C}/\mid z\mid<R\}$.
Pour $z=0$ on obtient : $S^{(p)}(0)=p!a_p$
donc $a_p=\dfrac{S^{(p)}(0)}{p!}$.

et on peut écrire : $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}z^n$.
(c'est la série de Taylor à l'origine).

Scanned with CamScanner

2. Fonctions Analytiques

Définition 2.1

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction complexe, U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$.
On dit que f est analytique en z_0 si :
– Il existe un nombre $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$
– il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z - z_0)^n$ de rayon de convergence $R > r$
tels que, pour tout $z \in D(z_0, r)$, on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Dans ce cas on dit aussi que f est développable en série entière.
On dit que f est **analytique** sur U si elle est analytique en tout point de U.

Scanned with CamScanner

Remarque : les coefficients a_n dépendent de z_0.
D'après ce qui précède
$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)...(n-p+1)a_n(z-z_0)^{n-p}$.
donc

$$a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}.$$

Exemple 2.2

Un polynôme P est une fonction analytique en tout point de $\mathbb{C}$:en effet, on peut développer le polynôme en tout point grâce à la formule de Taylor :

$$P(z) = P(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

où n est le degré de P.

On verra qu'il existe des fonctions analytiques qui ne sont pas des polynômes.

Scanned with CamScanner

Exemple 2.3

D'après l'exemple 1.7, pour tout $z \in D(0,1)$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

donc la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est analytique en 0.

Scanned with CamScanner

Théorème 2.4

La somme d'une série entière est une fonction analytique dans son disque de convergence.
Autrement dit, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D(0, R)$, Alors, pour chaque $z_0 \in D(0, R)$ il existe une (b_n) qui de z_0 telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ pour z voisin de z_0.

Scanned with CamScanner

Exemple 2.5

Revenons à l'exemple précèdent, la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ est analytique en 0

c'est à dire, pour tout $z \in D(0,1)$ $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Et pour tout $z_0 \in D(0,1)$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0}.\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{1-z_0}}$$

comme $|\dfrac{z-z_0}{1-z_0}| < 1$ pour tout $z \in D(z_0, 1-|z_0|)$

alors $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{1-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{z-z_0}{1-z_0})^n$.

Donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ où $b_n = \dfrac{1}{(1-z_0)^{n+1}}$

Scanned with CamScanner

Remarque 2.6

Une fonction analytique est indéfiniment dérivable (pour la variable réelle ou complexe).
Pour la réciproque, la situation est toute différente selon que la variable est réelle ou complexe.
Nous verrons, dans le cas complexe, que toute fonction holomorphe est analytique, donc indéfiniment dérivable.
Dans le cas réel, nous savons qu'une fonction dérivable n'est pas nécessairement de classe C^∞ (pas même de classe C^2).
D'autre part, il existe des fonctions à valeurs réelles de classe C^∞ et que ne sont pas analytique comme le montre l'exemple suivant.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$
Mais f n'est pas analytique en 0.

Scanned with CamScanner

Analycité des fonctions holomorphes

Grâce à la formule intégrale de Cauchy, on peut développer toute fonction holomorphe en série entière.

Théorème 2.7

Si f est holomorphe dans un domaine Ω de $\mathbb{C}$, alors f est analytique dans Ω.
Et pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $R > 0$, pour $z \in D(z_0, R)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

où

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$$

et γ est le cercle de centre z_0
et de rayon R parcouru dans le sens direct.

Scanned with CamScanner

Corollaire 2.8

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, où Ω est un ouvert e $\mathbb{C}$. Alors f est analytique sur Ω et elle est indéfiniment dérivable.

Scanned with CamScanner

Corollaire 2.9

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, où Ω est un ouvert e $\mathbb{C}$.
f est analytique sur $\Omega \iff f$ est holomorphe sur Ω.

Preuve

Remarque :

La différence entre fonction **holomorphe** et fonction **analytique** est que l'on peut définir la notion de fonction analytique d'une **variable réelle**, notion qui diffère de fonctions dérivable.

Scanned with CamScanner

Proposition 2.10

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ tel que $\overline{D}(z_0, R) \subset U$; $(R > 0)$.
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U,
Pour tout $z \in D(z_0, R)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

c'est le développement en série de Taylor de f.
La preuve est basée sur théorème 2.7 et Remarque2.1.

Scanned with CamScanner

Théorème 2.10'

Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ (ensemble sans trou).
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω et $z_0 \in \Omega$.
Alors il existe une série de puissance de $(z - z_0)^n$ qui représente f, c.à.d

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
Cette représentation est valide dans le plus grand disque $D(z_0, R)$ contenu dans Ω.
Si $z_0 = 0$, on obtient la série de Maclaurin.

Scanned with CamScanner

D'après ce qui précède : th 2.7 et th 2.10 on la formule de Cauchy suivante :

Théorème 2.11 (Formule de Cauchy)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω et $z_0 \in \Omega$.
Alors f est indéfiniment dérivable. De plus si γ est un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans Ω, pour tout z dans l'intérieur de γ, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} du$$

En particulier :

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^2} du$$

$$f''(z) = \frac{2}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^3} du \qquad f^{(3)}(z) = \frac{6}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^4} du.$$

Scanned with CamScanner

Exemple : Fonctions usuelles.

la fonction exponentielle

(•) La fonction exponentielle $z \mapsto e^z$ est analytique à l'origine, et on a $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(•) Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, notre fonction est également analytique en z_0 et pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$e^z = e^{z-z_0+z_0} = e^{z_0}.e^{z-z_0} = e^{z_0}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}.$$

Scanned with CamScanner

Exercice

Développer en série entière les fonctions suivantes :

(1) $f(z) = \dfrac{1}{6z^2 - 5z + 1}$

(2) $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 3z + 1}$

Scanned with CamScanner

Fonctions usuelles

(1) $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(2) $Ch(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(3) $Sh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(4) $Cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(5) $Sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(6) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour tout $z \in D(0,1)$.

(7) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$ pour tout $z \in D(0,1)$.

(8) $\log(1-z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ pour tout $z \in D(0,1)$.

(9) $\log(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ pour tout $z \in D(0,1)$.

Scanned with CamScanner

3. Propriété des zéros isolés

Proposition 3.1

Soit f une fonction **analytique** définie sur un **domaine** D.
S'il existe un point $z_0 \in D$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $f^{(p)}(z_0) = 0$,
alors $f(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

Rappel : D domaine = ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Scanned with CamScanner

Théorème 3.2

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction **analytique non identiquement nulle** où D est un **domaine** de $\mathbb{C}$.
Pour tout $z_0 \in D$ tel que $f(z_0) = 0$,
il existe un disque $D(z_0, r)$ sur lequel la fonction f n'a pas d'autre zéros que z_0.
et il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.
Le plus petit entier m vérifiant $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ est appelé **ordre de multiplicité** de z_0.

L'énoncé est équivalent à dire que les zéros d'une fonction analytique, non nulle et définie sur un ouvert connexe, sont isolés et d'ordre fini.

Scanned with CamScanner

Prolongement analytique

Si P et Q sont deux polynômes de $C[X]$ prennent mêmes valeurs pour une infinité de valeurs de X, ils sont égaux. Ce principe se généralise pour les fonctions analytiques, plus précisément on a le résultat suivant :

Proposition 3.3

Soient f et g deux fonctions analytiques sur un domaine D de $\mathbb{C}$.
Si f et g coïncident sur une partie A de D qui a un point d'accumulation dans D,
alors elles coïncident sur D.

Scanned with CamScanner

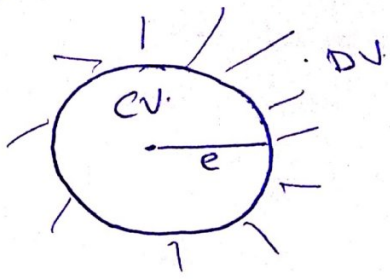
MERCI POUR VOTRE ATTENTION

Scanned with CamScanner

Lemme 1.4 $0 < r < r_0$

Si $\exists M > 0$: $|a_n| r_0^n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

alors la série $\sum_n a_n z^n$ cv normalement pour tout $|z| \leq r$



Soit $z \in \mathbb{C}$ / $|z| \leq r$.

on a : $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$

$\leq |a_n| r_0^n \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$

$\leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ ← terme général d'une série géométrique convergente car $\frac{r}{r_0} < 1$.

ce qui montre que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est normalement CV.

pour tout $|z| \leq r$.

Proposition 1.2

1) Soit $r < e$ La série $\sum a_n z^n$ normalement CV pour tout $|z| \leq$

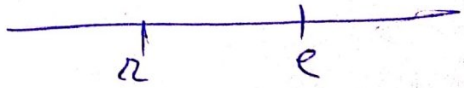
Par définition de e, il existe $r < r_0 < e$ tq que $\sum |a_n| r_0^n$ CV

(déf de la borne sup)

donc $\exists M > 0$: $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|a_n| r_0^n \leq M$

D'après le lemme 1,4, la série $\sum_n a_n z^n$ con. normalement

pour tout $|z| \leq r$.



Scanned with CamScanner

2) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$: $|z_0| > \ell$ Mque $\sum a_n z^n$ DV.

Alors $\forall M$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tque. $|a_n z_0|^n > M$ (*)

Car, sinon $\exists M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|a_n| \cdot |z_0|^n \leq M$

avec $r_0 = |z_0|$, le lemme 1,4 implique : $\sum a_n z^n$

pour tout $|z| \leq |z_0|$

Ce qui contredit la définition de ℓ (ℓ Sup ...

et (*) $\Rightarrow$ $\sum a_n z_0^n$ DV. ▨

Scanned with CamScanner

Exemple 2.5 $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $\forall z \in D(0,1)$

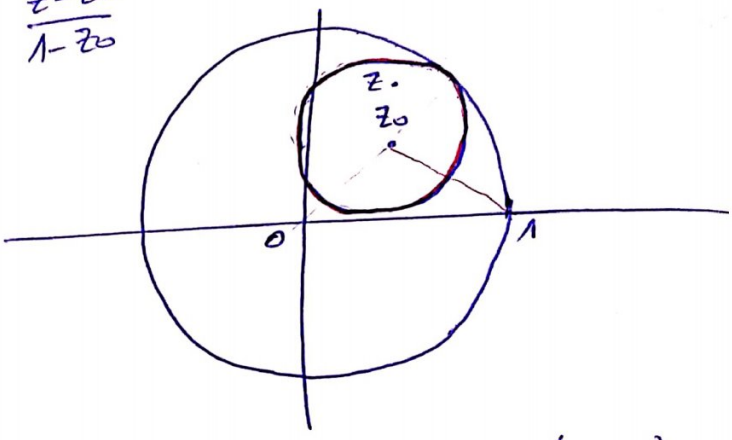
f st analytique en 0 et

Soit $z_0 \in D(0,1)$ M que f st analytique z_0.

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{(1-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}}$$



- Pour $z \in D(z_0, r)$ avec $r = 1-|z_0|$

on a:
$|z-z_0| < 1-|z_0| < |1-z_0|$

$\Rightarrow \left|\frac{z-z_0}{1-z_0}\right| < 1$

donc $\dfrac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n$ pour tout $z \in D(z_0, r)$

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{1-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \text{pour tout } z \in D(z_0, r)$$

Ce qui montre que f st analytique en z_0.

(D'où f st analytique sur $D(0,1)$)

Scanned with CamScanner

Théorème 2.7

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe $\Rightarrow$ f est analytique sur Ω.

Soit $z_0 \in \Omega$.

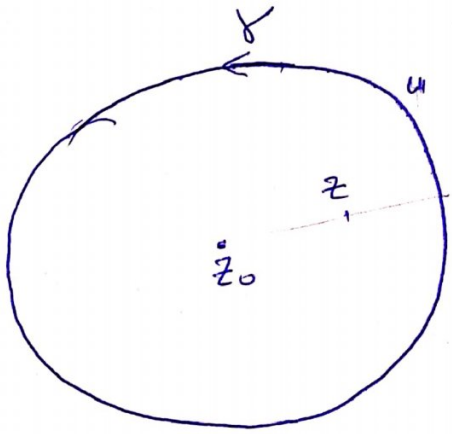
f est holomorphe $\Rightarrow \exists R : D(z_0, R) \subset \Omega$

et d'après la formule de Cauchy : pour tout $z \in D(z_0, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} \, du.$$

γ : cercle de centre z_0 et de rayon R

$\left(\gamma(t) = z_0 + R e^{it} \quad t \in [0, 1] \right)$



Par ailleurs, $\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - z_0 - (z - z_0)}$

$$= \frac{1}{u - z_0 \left(1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}\right)}$$

$$= \frac{1}{u - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}}$$

Puisque : $\left| \frac{z - z_0}{u - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} < 1$

alors $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^n$ pour tout $u \in \gamma$, $z \in D(z_0, R)$

(D'après l'exemple)

Donc $\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^n$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(u - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \quad (*)$$

Donc $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(u - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \, du$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

Scanned with CamScanner

puis la série (*) converge normalement dans le cercle $\mathcal{C}(z_0, R)$
donc elle converge uniftes
Donc on peut intervertir l'intégration suivant u
et la somme sur n dans la formule (**)

ce qui donne:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \left(\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du \right) (z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

où $$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(z-z_0)^{n+1}} du.$$

ce qui montre que f est analytique en z_0 ▨

Inversement (corollaire 2.9)

f est analytique en $z_0 \in U \Rightarrow \exists R > 0$ (an) ∈ ℂ

tque: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ pour tout $z \in D(z_0, R)$

D'après théorème 1,10 (prop. 1,10), f est holomorphe

et $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

Conclusion

f est holomorphe sur $\Omega \iff$ f est analytique sur Ω

Scanned with CamScanner

Les Résidus

8 mai 2020

Scanned with CamScanner

1 Singularités isolées

2 Les Résidus

3 Théorème des Résidus

4 Les Lemmes de Jordan

5 Applications : Calcul des intégrales

Scanned with CamScanner

1.1. Classification des Singularités isolées

Définition 1.1 (zéro)

Soit $f : D(a, r) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.
On dit que a est un zéro d'ordre p de f s'il existe une fonction holomorphe g sur $D(a, r)$
telle que $f(z) = (z - a)^p g(z)$ et $g(a) \neq 0$.

D'après le principe des points isolés pn a

Proposition 1.2

Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe.
Alors elle possède un nombre fini de zéros dans tout compact $K \subset U$.
c est) dire $\forall K$ compact dans U l'ensemble $\{a \in K / f(a) = 0\}$ est fini.

Scanned with CamScanner

Définition 1.3 (singularité isolée)

On dit que z_0 est point singulier (ou singularité isolée) d'une fonction f s'il existe $r > 0$ tel que : la fonction f est holomorphe dans le disque épointé $D(a, r) \setminus \{a\}$.
Mais pas nécessairement holomorphe en a.

Il existe trois types de singularités.

1. Singularité apparente = fausse singularité

Si $\lim_{z \to a} f(z)$ existe dans $\mathbb{C}$, on dit que a est une **singularité apparente.**
(On peut prolonger f sur $D(a, r)$).

Exemple 1 : $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$.
La fonction f est holomorphe sur $D(0, r) \setminus \{0\}$.
$\lim_{z \to 0} f(z) = 1$, donc 0 est **singularité apparente** de f.

Scanned with CamScanner

2. Pôle

Si $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-a)^p}$ pour tout $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$, où h est une fonction holomorphe sur $D(a,r)$ et $h(a) \neq 0$, on dit que a est **un pôle d'ordre** p de f.
Si $p = 1$, on dit que a est pôle simple de f.

3. Singularité essentielle

Une singularité qui n'est pôle ni apparente est appelée **singularité essentielle**.

Exemples 1.4 :

(2) $f(z) = \dfrac{5}{(z-4)^3}$, (3) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

(4) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$. (5) $f(z) = \dfrac{z}{(z+i)}$

Scanned with CamScanner

1.2. Série de Laurent

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, Un point frontière z_0 de U est dit **point isolé** s'il existe un disque $D(z_0, r)$ de centre z_0 tel que
$U \cap D(z_0, r) = D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.
exemple : 0 est un point isolé de $U = \mathbb{C}^*$.

Définition 1.5 (couronne)

Une couronne de centre z_0 est définie par la donnée de deux nombres réels : $0 \leqslant r_1 < r_2$, tel que
$C = C(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} / r_1 \leqslant \mid z - z_0 \mid \leqslant r_2\}$.

Une couronne C est connexe mais pas convexe.
L'ensemble ouvert $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ est un cas particulier de couronne de centre z_0.

Scanned with CamScanner

Soit f une fonction holomorphe sur la couronne C. Soit z un point de C, et r tel que $\mid z_0 - z \mid < r < r_2$. On considère γ_r le cercle de centre z_0 et de rayon r. En général, on n'a pas la formule de Cauchy

$$f(z) \neq \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z} du$$

Théorème 1.6

Soi f une fonction holomorphe dans la couronne $C = C(z_0, r_1, r_2)$ et z on point de C.
Pour tout $r_1 < r < \mid z_0 - z \mid < r' < r_2$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_r} \frac{f(u)}{u-z} du - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z} du.$$

La preuve

Scanned with CamScanner

Théorème 1.7 (développement de Laurent)

Soi D un domaine de $\mathbb{C}$ contenant la couronne $C = C(z_0, r_1, r_2)$.
Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où $a_n = \dfrac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \dfrac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$
et γ_r le cercle de centre z_0 et de rayon r $(r_1 < r < r_2)$ parcouru dans le sens positif.

Scanned with CamScanner

On peut réécrire l'égalité (1) sous la forme,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ est appelée la partie principale
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ est la partie régulière.
La première série (en $\frac{1}{z-z_0}$) converge pour $\mid z - z_0 \mid > r_1$, et la second (en $z - z_0$) converge en $\mid z - z_0 \mid < r_2$.
Ce développement est appelé **développement de Laurent** de f.

Scanned with CamScanner

Un point z_0 est une singularité isolé pour une fonction f si :
f est holomorphe dans un disque pointé
$D(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} | 0 <| z - z_0 |< r\}$ centré en z_0.
Suivant la nature du développement de Laurent en z_0, on distingue trois cas :
(1) Une singularité isolée est **apparente** si le développement de Laurent ne contient aucun terme $(z - z_0)^k$ avec $k < 0$.
(2) Une singularité isolée est un **pôle d'ordre** p si
$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-p} \neq 0$.
(3) Une singularité isolée est **essentielle** si le développement de Laurent contient un nombre infini de terme $(z - z_0)^k$ avec $k < 0$.

Remarque :
Au voisinage d'un pôle z_0, une fonction holomorphe $f(z)$ tend vers ∞ lorsque $z \to z_0$. Le comportement au voisinage d'une singularité essentielle est beaucoup plus complexe.

Exemple :

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \text{ mais } \lim_{y \to 0} e^{\frac{1}{iy}} \text{ n'existe pas.}$$

Scanned with CamScanner

2. Les résidus

Définition 2.1

Soit f une fonction holomorphe dans un disque épointé $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.
Elle a donc un développement de Laurent en z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On appelle **résidu** de f en z_0 le nombre complexe $Res(f, z_0) = a_{-1}$,
et on a $Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(z)dz$,
où γ_r est le cercle de centre z_0 et de rayon $r < R$ parcouru une seule fois dans les sens positive ($\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$).

$Res(f, z_0) = a_{-1}$ est le coefficient de $(z - z_0)^{-1}$dans le développement en série de Laurent de f en z_0.

Scanned with CamScanner

Proposition 2.2

Le résidu de f en z_0 est l'unique nombre complexe a tel que la fonction $f(z) - \dfrac{a}{z - z_0}$ ait une fonction primitive sur un disque épointé de centre z_0

Scanned with CamScanner

Définition 2.3

Soient z_0 un pôle d'ordre p d'une fonction f.
Il existe $r > 0$ tel que : Pour tout $z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$: $f(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^p}$ où h est une fonction holomorphe sur $D(z_0; r)$ et $h(z_0) \neq 0$.
Il existe une suite (α_n) dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$h(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0)^1 + ... + \alpha_{p-1}(z - z_0)^{p-1} + \alpha_p(z - z_0)^p + ...$$

Donc

$$(*) \quad f(z) = \frac{\alpha_0}{(z - z_0)^p} + ... + \frac{\alpha_{p-1}}{(z - z_0)} + \alpha_p(z - z_0) + ...$$

Le coefficient α_{p-1} dans $(*)$ est appelé le résidu de f au point z_0.
On note $Res(f, z_0) = \alpha_{p-1}$.

Scanned with CamScanner

Exemples 2.4

$$(1) \quad f(z) = \frac{5z^3 + z^2 + 7}{z}$$

$$(2) \quad f(z) = \frac{3z^5 + 2z^3 + 10}{z^4}$$

$$(3) \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4}$$

$$(4) \quad f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

$$(5) \quad f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^4}.$$

Scanned with CamScanner

2.2 Méthode pratique de calcul des résidus

Cas d'un pôle simple

Si z_0 est un pôle simple d'une fonction complexe f alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Cas d'un pôle d'ordre p

Si z_0 est un pôle d(ordre p d'une fonction complexe f alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} ((z - z_0)^p f(z))$$

Scanned with CamScanner

Méthode pratique de calcul des résidus.

Cas Particulier

Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ pour tout $z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$, avec P et Q sont deux fonctions holomorphes sur $D(z_0; r)$ tel que
$P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$.
Alors, z_0 est un pôle simple de la fonction f et on a

$$Res(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Preuve

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{\frac{Q(z)}{z - z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Scanned with CamScanner

Exemples

Exemples 1

On considère la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z-1)^3}$.
$z_0 = 1$ est un pôle d'ordre 3 de la fonction f.
Déterminer $Res(f, 1)$.

Exemples 2

On considère la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z}$.
Déterminer $Res(f, 0)$.

Scanned with CamScanner

1. Exemples

Exemples 3

On considère la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$.
Déterminer $Res(f, 1)$ et $Res(f, 0)$.

$$Res(f, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{z} = -1$$

Exemples 4

On considère la fonction définie par $f(z) = \frac{3z+5}{z^3-2z+4}$.
Déterminer $Res(f, 2)$.

Scanned with CamScanner

3 Théorème des Résidus

3.1 Théorème

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a_1, a_2 ... a_n \in U$.
On considère f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{a_1, a_2 ... a_n\}$ avec $a_1, a_2 ... a_n$ sont des pôles de f.
Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermé simple située dans l'ouvert U ainsi que son intérieur, et entourant les points $a_1, a_2 ... a_n$
Alors

$$\int_{\mathcal{C}^+} f(z)dz = 2i\pi \quad \Sigma_{k=1}^{k=n} Res(f, a_k)$$

$\mathcal{C}^+$ chemin parcouru une **seule fois** dans le sens direct.

Scanned with CamScanner

3.2 Exemples

Exemples 1

On considère la fonction définie par $f(z) = \frac{z^4}{(z-2)(z-3)^2}$.
$\mathcal{C}_r$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon r.
Calculer $\int_{\mathcal{C}_r^+} f(z)dz$ dans les cas : $r = 1$, $r = \frac{5}{2}$ et $r = 4$.

f est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{2; 3\}$, admettant deux pôles : 2 comme pôle simple et 3 pôle double.

Scanned with CamScanner